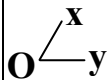
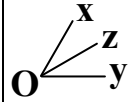


زاویه: زاویه مجموعه نقاطی از صفحه است که به دو نیم خط با مبدأ مشترک محدود باشند. مانند زاویه $\angle xOy$



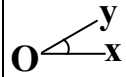
(یا مختصراً $\angle O$) که در آن Ox و Oy را اضلاع زاویه و O را رأس زاویه می نامیم.

نیمساز زاویه: نیم خطی را که از رأس زاویه گذشته و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند نیمساز آن زاویه می نامیم.

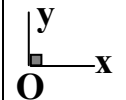


مانند نیمساز Oz

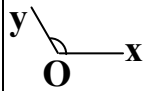
انواع زاویه:



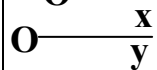
(۱) **زاویه حاده (تند):** زاویه است که اندازه اش بین صفر تا 90° درجه باشد.



(۲) **زاویه قائمه:** زاویه ای که بر زاویه ی مجانبش منطبق است را قائمه گویند. اندازه این زاویه برابر 90° درجه است.

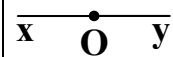


(۳) **زاویه منفرجه (باز):** زاویه ای است که اندازه اش بین 90° تا 180° درجه باشد.



(۴) **زاویه صفر درجه:** هرگاه دو ضلع زاویه بر هم منطبق باشند اندازه ی این زاویه صفر درجه است.

(۵) **زاویه نیم صفحه:** هرگاه دو ضلع زاویه در امتداد یکدیگر و مختلف الجهت باشند به آن زاویه ی نیم صفحه گویند. اندازه

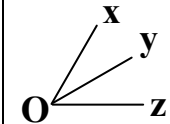


این زاویه 180° درجه است.

وضهیت دو زاویه:

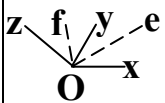
(۱) **دو زاویه مجاور:** دو زاویه را که در رأس و یک ضلع مشترک و دو ضلع غیر مشترک آن ها در طرفین ضلع مشترک واقع

باشد مجاور می نامیم مانند دو زاویه ی مجاور $\angle xOy$ و $\angle yOz$



نکته: زاویه ی بین دو نیمساز دو زاویه ی مجاور نصف مجموع دو زاویه است به طوری که اگر Oe و Of به ترتیب نیمساز زاویه

های مجاور $\alpha = \angle xOy$ و $\beta = \angle yOz$ باشند آنگاه $\angle eOf = \frac{\alpha + \beta}{2}$



(۲) **دو زاویه متمم:** دو زاویه ای که مجموع اندازه های آن ها برابر 90° درجه باشد را دو زاویه ی متمم می نامیم. مانند دو

زاویه ی متمم 25° درجه و 65° درجه

(۳) **دو زاویه مکمل:** دو زاویه ای که مجموع اندازه های آن ها برابر 180° درجه باشد را دو زاویه ی مکمل می نامیم. مانند دو

زاویه ی مکمل 35° درجه و 145° درجه

نکته ۱: متمم زاویه ی A برابر $90^\circ - A$ و مکمل زاویه ی A برابر $180^\circ - A$ می باشد.

نکته ۲: اگر مجموع دو زاویه A و B برابر α باشد مجموع متمم های دو زاویه A و B برابر $180^\circ - \alpha$ است.

$$90^\circ - A + 90^\circ - B = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - \alpha$$

زیرا

نکته ۳: اگر مجموع دو زاویه A و B برابر α باشد مجموع مکمل های دو زاویه A و B برابر $360 - \alpha$ است.

$$180 - A + 180 - B = 360 - (A + B) = 360 - \alpha \quad \text{زیرا}$$

نکته: تفاضل متمم از مکمل هر زاویه دلخواه برابر 90 است.

$$180 - \alpha - (90 - \alpha) = 180 - \alpha - 90 + \alpha = 90 \quad \text{زیرا:}$$

نکته: مجموع متمم و مکمل زاویه ای α مانند برابر $270 - 2\alpha$ است.

$$180 - \alpha + 90 - \alpha = 270 - 2\alpha \quad \text{زیرا:}$$

قضیه: اگر دو زاویه مساوی باشند آن گاه:

الف: متمم های آن ها نیز با یکدیگر مساویند. ب: مکمل های آن ها نیز با یکدیگر مساویند.

مثال: مجموع دو زاویه 75 درجه است. مجموع مکمل های آن ها چند درجه است؟

$$(1) \quad 265 \quad (2) \quad 275 \quad (3) \quad 285 \quad (4) \quad 295 \quad \text{(آزمون پیش دانشگاهی ریاضی ۷۷)}$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است. روش اول: اگر مجموع دو زاویه A و B برابر α باشد مجموع مکمل های این دو زاویه برابر $360 - \alpha$

$$360 - 75 = 285 \quad \text{است. پس:}$$

روش دوم: زاویه ها را A و B می نامیم. $\hat{A} + \hat{B} = 75 \Rightarrow 180 - \hat{A} + 180 - \hat{B} = 360 - (\hat{A} + \hat{B}) = 360 - 75 = 285$

مثال: دو زاویه A و B متمم اند. اندازه زاویه A برابر $\frac{4}{9}$ اندازه مکمل زاویه B است. زاویه A چند درجه است؟

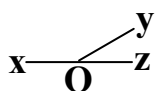
$$(1) \quad 27 \quad (2) \quad 36 \quad (3) \quad 63 \quad (4) \quad 72 \quad \text{(کنکور سراسری ریاضی ۷۵)}$$

جواب: گزینه ۴ صحیح است. روش اول:

$$\begin{cases} A + B = 90 \\ A = \frac{4}{9}(180 - B) \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{9}(180 - B) + B = 90 \Rightarrow 720 - 4B + 9B = 810 \Rightarrow 5B = 90 \Rightarrow \begin{cases} A = 72^\circ \\ B = 18^\circ \end{cases}$$

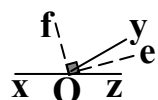
$$\begin{cases} B = 90 - A \\ A = \frac{4}{9}(180 - B) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{4}{9}(90 + A) \Rightarrow 9A = 36 + 4A \Rightarrow 5A = 360 \Rightarrow A = 72^\circ \quad \text{روش دوم:}$$

۴) دو زاویه مجانب: دو زاویه مجاور که دو ضلع غیر مشترک آن ها در یک امتدادند را دو زاویه مجانب گویند. به



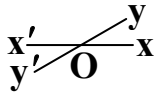
عبارت دیگر دو زاویه مجاور و مکمل یکدیگر را دو زاویه مجانب می گویند. مانند دو زاویه مجانب xOy و yOz

نکته: نیمسازهای دو زاویه مجانب بر هم عمودند به عبارت دیگر نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه بر هم عمودند.

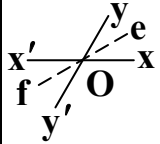


۵) **دو زاویه متقابل به رأس**: زاویه های مقابل در بین دو خط متقاطع را متقابل به رأس می نامند. مانند دو زاویه ی

متقابل به رأس xOy و $x'Oy'$



قضیه: الف: زاویه های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع با یکدیگر مساویند.

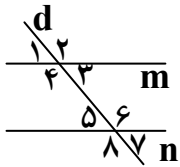


ب: نیمسازهای زاویه های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع بر روی یک خط راست واقع اند.

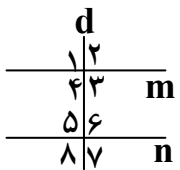
نکته: در صفحه، اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است.

قضیه خطوط موازی و مورب: اگر دو خط موازی را خط موربی قطع کند آنگاه زاویه های حاده ایجاد شده با هم و

زاویه های منفرجه ایجاد شده با هم مساویند و یک زاویه حاده با یک زاویه منفرجه مکمل است و بر عکس.



$$m \parallel n \text{ و } d \text{ مورب} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{1} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7}, \hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8} \\ \hat{1} + \hat{2} = \hat{2} + \hat{3} = \hat{3} + \hat{4} = \hat{4} + \hat{1} = 180^\circ, \hat{5} + \hat{6} = \hat{6} + \hat{7} = \hat{7} + \hat{8} = \hat{8} + \hat{5} = 180^\circ \\ \hat{3} + \hat{6} = \hat{4} + \hat{5} = \hat{2} + \hat{7} = \hat{1} + \hat{8} = 180^\circ, \hat{2} + \hat{5} = \hat{1} + \hat{6} = \hat{4} + \hat{7} = \hat{3} + \hat{8} = 180^\circ \end{cases}$$



حالت خاص: اگر در صفحه ای خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است

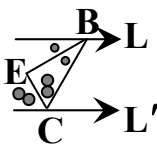
و هشت زاویه ایجاد شده با هم برابرند و بر عکس.

مثال) اگر دو خط موازی را موربی قطع کند، کدام گزاره همواره درست است؟

(۱) هر دو زاویه برابرند. (۲) هر دو زاویه مکمل اند

(۳) هر دو زاویه مجانب اند. (۴) همه زاویه های حاده برابرند. جواب: گزینه ۴ صحیح است.

نکته: نیمسازهای دو زاویه محصور بین دو خط موازی و واقع در یک طرف خط مورب بر هم عمودند.

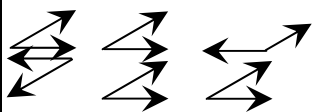


یعنی در شکل مقابل $\hat{E} = 90^\circ$

مثال) خط های L و L' با هم موازی اند، BE و CE نیمسازهای زاویه ی B و C هستند. اندازه ی زاویه ی E کدام است؟

(۱) ۴۵ درجه (۲) ۷۵ درجه (۳) ۶۰ درجه (۴) ۹۰ درجه

جواب: گزینه ۴ صحیح است. $\hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow 2\hat{EBC} + 2\hat{ECB} = 180 \Rightarrow \hat{EBC} + \hat{ECB} = 90 \Rightarrow \hat{E} = 90$

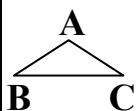


نکته: اگر اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی باشند آنگاه آن دو زاویه مساوی یا مکمل اند.

مثلت: اگر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست را دو به دو به هم وصل کنیم شکل حاصل را مثلث می نامند مانند مثلث ABC .

در این مثلث هر یک از پاره خط های AB و BC و AC را یک ضلع و هر یک از زاویه های A و B و C را یک زاویه مثلث می

نامند. سه ضلع و سه زاویه هر مثلث را اجزای اصلی آن می گویند.





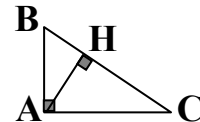
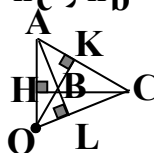
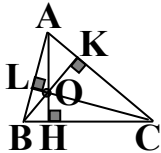
زاویه خارجی مثلث: زاویه ای که از امتداد دادن یک ضلع تشکیل می شود زاویه خارجی نامیده می شود. مانند زاویه خارجی ACD



ضلع مقابل به آن (و یا امتداد آن) رأس فرود می آید، مانند ارتفاع AH در شکل مقابل:

هر مثلث سه ارتفاع دارد که در یک نقطه مانند O به نام مرکز ارتفاعی مثلث همرسند.

اندازه‌ی ارتفاع‌های AH ، BK و CL را به ترتیب به h_a ، h_b و h_c نشان می دهند.



نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث

نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث منفرجه

نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث قائم

تعریف میانه مثلث: پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث، و سر دیگر آن، وسط ضلع مقابل به آن رأس است.

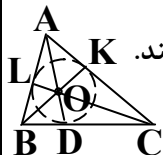


مانند میانه AM در شکل مقابل. هر مثلث سه میانه دارد که در یک نقطه مانند G به نام مرکز ثقل مثلث همرسند.

اندازه‌ی میانه‌های AM ، BN و CK را به ترتیب به m_a ، m_b و m_c نشان می دهند.

تعریف نیمساز زاویه درونی مثلث: پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث و سر دیگر آن، نقطه ای روی

ضلع مقابل به آن رأس است به طوری که زاویه‌ی درونی نظیر آن رأس را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. مانند نیمساز درونی



AD هر مثلث سه نیمساز زاویه‌ی درونی دارد که در یک نقطه مانند O به نام مرکز دایره‌ی محاطی درونی مثلث همرسند.

اندازه‌ی نیمساز‌های زاویه‌ی درونی AD ، BK و CL را به ترتیب به d_a ، d_b و d_c نشان می دهند.

تعریف نیمساز زاویه برون مثلث: پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث، و سر دیگر آن، نقطه ای در

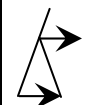


امتداد ضلع مقابل به آن رأس است به طوری که زاویه‌ی برون نظیر آن رأس را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

مانند نیمساز برون AD' در شکل مقابل.

هر مثلث سه نیمساز زاویه‌ی برون دارد. اندازه‌ی نیمساز‌های زاویه‌ی برون نظیر زاویه‌های A ، B و C مثلث ABC را به

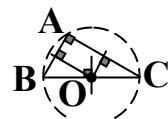
ترتیب به d'_a ، d'_b و d'_c نشان می دهند.



حالت خاص: در مثلث متساوی الساقین نیمساز برون زاویه‌ی رأس با قاعده موازی است.

تعریف عمود منصف ضلع مثلث: خطی است که در وسط ضلع مثلث، بر آن عمود است. هر مثلث سه عمود منصف

دارد که در یک نقطه مانند O به نام مرکز دایره‌ی محیطی مثلث همرسند.



نقطه برخورد سه عمود منصف مثلث

نقطه برخورد سه عمود منصف مثلث

نقطه برخورد سه عمود منصف مثلث

دایره: تمام نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز در آن صفحه به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت را شعاع



دایره نامیده می‌شود.

تذکر: دایره به مرکز O و به شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نشان می‌دهند.

مثال: دو نقطه ثابت A و B در صفحه داده شده است. اگر طول پاره خط AC داده شده باشد، برای یافتن مکان نقطه‌ی C باید

(۱) عمود منصف AB را رسم کنیم. (۲) به مرکز A دایره‌ای رسم کنیم.

(۳) خطی موازی AB رسم کنیم. (۴) از دو سر پاره خط AB بر آن عمود کنیم.

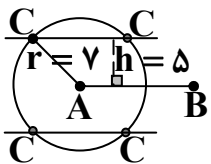
جواب: گزینه ۲ صحیح است. چون طول پاره خط AC داده شده است. فاصله‌ی نقطه‌ی C از A مشخص است. با توجه به ثابت

بودن نقطه‌ی A ، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AC رسم می‌کنیم. نقطه‌ی C روی این دایره واقع خواهد شد.

(۱) چند نقطه‌ی متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحه‌ی مختصات، می‌توان یافت که فاصله‌ی رأس C از نقطه‌ی A

و پاره خط AB ، به ترتیب ۷ و ۵ واحد، باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (کنکور سراسری ریاضی ۹۹ خارج از کشور)



جواب: گزینه ۴ صحیح است. مکان هندسی رأس C محل برخورد دایره‌ای به مرکز A به شعاع ۷

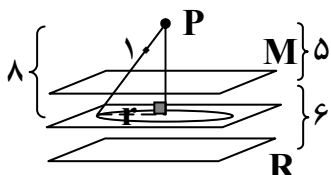
با دو خط موازی AB به فاصله ۵ واحد از AB می‌باشد.

مثال: دو صفحه موازی هم و نقطه P به فاصله ۵ و ۱۱ واحد از دو صفحه در بالای هر دو قرار دارد. مکان هندسی نقاطی که از دو

صفحه به یک فاصله و از نقطه P به فاصله ۱۰ واحد باشد، کدام است؟

(۱) دایره‌ای به شعاع ۶ (۲) پاره خط به طول ۶ (۳) دایره به شعاع $4\sqrt{2}$ (۴) پاره خط به طول $4\sqrt{2}$

(کنکور سراسری ریاضی ۹۱ خارج از کشور)



جواب: گزینه ۱ صحیح است. یک مکان هندسی نقطه‌ای که از دو صفحه موازی M و R به یک

فاصله باشد صفحه‌ای است موازی آن دو و به فاصله‌ی یکسان از آن دو. مکان هندسی دیگر نقاطی

که از نقطه ثابت P ، به فاصله ۱۰ باشد سطح کره‌ای به مرکز P و به شعاع ۱۰ است. این دو مکان را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی تلاقی این

دو مکان جواب مسئله است. لازم به ذکر است که کره و این صفحه متقاطع اند. پس فصل مشترک آنها یک دایره است. با توجه به

$$r^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow r = 6$$

شکل دایره‌ای به شعاع ۶ مکان هندسی مورد نظر است.

۲) چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها از هر کدام از دو خط متقاطع d_1 و d_2 برابر ۲ سانتی متر باشد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

جواب: گزینه ۴ صحیح است. درون هر یک از زاویه‌های بوجود آمده از برخورد دو خط متقاطع d_1 و d_2 ،

دو خط L و L' را به ترتیب موازی d_1 و d_2 و به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از آنها رسم می‌کنیم نقطه تقاطع

این دو خط را A می‌نامیم. فاصله‌ی این نقطه از هر کدام از دو خط متقاطع d_1 و d_2 برابر ۲ سانتی متر است.

به بیان دیگر نقاطی از صفحه که از یک خط به فاصله‌ی معینی هستند، دو خط به موازات آن و در دو طرف

خط مفروض می‌باشند، دو خط متقاطع d_1 و d_2 را در نظر می‌گیریم و دو خط به موازات هر یک و به

فاصله‌ی ۲ سانتی متر از آن‌ها را رسم می‌کنیم. نقاط برخورد آن‌ها (نقاط A, B, C, D) جواب‌های مسأله‌اند.

قضیه وجودی مثلث: سه عدد حقیقی مثبت a, b, c داده شده‌اند، اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر

کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلع‌های آن a, b, c هستند.

مثال: پاره خط AB به طول ۲۰ سانتی متر مفروض است، چند نقطه در فضا می‌توان یافت کرد که از A به فاصله‌ی ۱۲ و از B به

فاصله‌ی ۱۱ باشند؟

۴ (بیشمار)

۲ (۳)

۱ (۲)

هیچ (۱)

جواب: گزینه ۴ صحیح است. یک مکان هندسی نقاط در فضا که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱۲ باشند کره‌ای به مرکز A و شعاع ۱۲

است و مکان هندسی دیگر نقاط در فضا که از نقطه‌ی B به فاصله‌ی ۱۱ باشند کره‌ای به مرکز B و شعاع ۱۱ است. چون

$11 + 12 < 20$ می‌باشد پس این دو کره متقاطع خواهند بود.

قضیه: در صفحه، هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو

ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

مثال: در شکل مقابل هرگاه M نقطه‌ای روی نیمساز زاویه‌ی O باشد، مساحت مثلث OMN کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

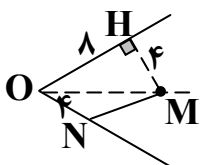
۸ (۲)

۶ (۱)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. در صفحه، هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع زاویه

$$S_{\Delta OMN} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

به یک فاصله است. در نتیجه ارتفاع مثلث OMN برابر خواهد بود لذا می‌توان نوشت:



۳) دو خط d و d' بر هم عمودند. اگر خط L ، این دو خط را در نقاط متمایز A و B قطع کند، آن گاه حداکثر چند نقطه روی خط L می توان یافت که از d و d' به یک فاصله باشند؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار

جواب: گزینه ۳ صحیح است. می دانیم در صفحه، هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. در نتیجه محل برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی و خارجی تشکیل شده بین دو خط متقاطع d و d' و خط L جواب مسأله اند. مسأله حداکثر دو جواب دارد. (واضح است که اگر خط L موازی یکی از دو خط d و d' باشد مسأله تنها یک جواب دارد.

توضیح: در صفحه، اگر نقطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

مثال: اگر O نقطه ای همرسی عمودمنصف های اضلاع مثلث ABC باشد و داشته باشیم $OA = x + 2$ ، $OB = 3x - 4$ و

$OC = y + 2$ ، حاصل $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

جواب: گزینه ۳ صحیح است. می دانیم در صفحه، اگر نقطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن به یک

$$\begin{cases} OA = OB \Rightarrow x + 2 = 3x - 4 \\ OA = OC \Rightarrow x + 2 = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x + y = 6$$

فاصله است.

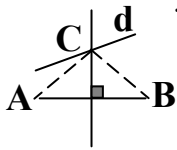
مثال: دو نقطه ای A و B و خط d داده شده اند. می خواهیم مثلث متساوی الساقینی رسم کنیم که رأسش روی d و قاعده ی آن

پاره خط AB باشد، با توجه به اوضاع A ، B و d ، تعداد جواب های ممکن برای رسم مثلث کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) یک جواب (۲) دو جواب (۳) هیچ جواب (۴) بیشمار

جواب: گزینه ۲ صحیح است. می دانیم در صفحه، هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد،

روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد. در نتیجه محل برخورد عمودمنصف پاره خط AB با خط d جواب مسأله است.



در صورتی که عمودمنصف AB خط d را در یک نقطه قطع کند مسأله یک جواب دارد.

در صورتی که عمودمنصف AB و خط d نقطه ی مشترک نداشته باشند مسأله جواب ندارد.

در صورتی که عمودمنصف AB و خط d بر هم منطبق باشند مسأله بیشمار جواب دارد.

۴) در دوزنقه $ABCD$ ، نقطه ای از دو سر قاعده ی CD به یک فاصله و همچنین از قاعده ی CD و ساق AD به یک فاصله

است. این نقطه حاصل برخورد کدام است؟

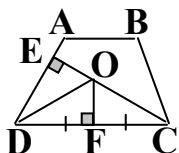
- (۱) نیمسازهای زاویه های C و D (۲) عمودمنصف های دو ساق

(۳) عمودمنصف CD و نیمساز زاویه ی D (۴) دو دایره با شعاع یکسان و به مرکز اوساط قاعده ها

جواب: گزینه ۳ صحیح است. می دانیم در صفحه، هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد،

روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد. و همچنین در صفحه، هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد

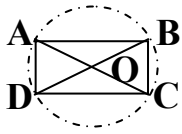
روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. و در نتیجه محل برخورد عمودمنصف CD و نیمساز زاویه ی D جواب مسأله است.



۵) چند مستطیل به قطر ۶ می توان رسم کرد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار

جواب: گزینه ۴ صحیح است. نقطه دلخواه O را در صفحه در نظر می گیریم سپس دایره ای به مرکز O و شعاع ۳ رسم می کنیم. هر دو قطر دلخواه و متقاطع AC و BD را رسم کنیم چهارضلعی $ABCD$ مستطیل به طول قطر ۶ و جواب مسأله است.

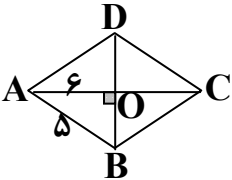


مثال: چه تعداد لوزی می توان رسم کرد که در آن طول یک قطر ۱۲ واحد و طول ضلع آن ۵ واحد باشد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بیشمار

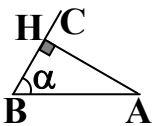
جواب: گزینه ۱ صحیح است. در لوزی قطرهای عمود منصف یکدیگرند

پس در مثلث قائم الزویه OAB داریم: $OA = 6$ و $AB = 5$ که این غیر ممکن است.



نکته: برای رسم یک n ضلعی محدب و غیر مشخص حداقل $3 - 2n$ جزء معلوم و مستقل از هم لازم است (البته همگی نباید زاویه باشند). لازم به ذکر است که اگر n ضلعی ویژگی خاصی داشته باشد، به تعداد این موردها از تعداد معلومات کم می شود.

نکته: ترسیم مثلث با داشتن اندازه‌ی دو ضلع و زاویه‌ی رو به روی یکی از آن‌ها به صورت $AB = c$ و $\hat{B} = \alpha$ و $AC = c$:



$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \sin B}{b}$$

با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

الف: اگر $\sin C > 1$ باشد مسأله جواب ندارد.

ب: اگر $\sin C = 1$ باشد مسأله حداکثر یک جواب دارد.

ج: اگر $\sin C < 1$ باشد در این حالت اگر $b < c$ آنگاه مسأله دو جواب دارد و اگر $b > c$ آنگاه مسأله یک جواب دارد.

مثال: با معلومات $AB = 8 \text{ cm}$ و $\hat{B} = 60^\circ$ و $AC = 6 \text{ cm}$ چند مثلث متمایز مشخص می شود؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

جواب: گزینه ۱ درست است. روش اول: با توجه به شکل اگر ارتفاع AH را رسم کنیم با توجه به اینکه در مثلث قائم الزویه ABH

ضلع روبرو به زاویه 60° برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است داریم: $AH = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6.928$ یعنی در مثلث

AHC ارتفاع AH از وتر AC بزرگتر است که این غیر ممکن است لذا مثلث تشکیل نمی شود.

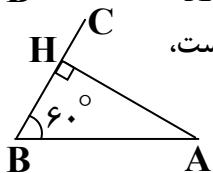
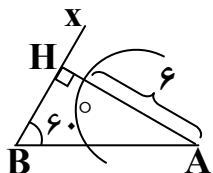
(به بیان بهتر ابتدا پاره خط $AB = 8 \text{ cm}$ را رسم می کنیم.

زاویه $\hat{B} = 60^\circ$ را رسم می کنیم (نیم خط Bx به وجود می آید).

دایره ای به مرکز A و به شعاع ۶ سانتیمتر رسم می کنیم، تا نیم خط Bx را در نقطه C قطع کند.

فاصله‌ی نقطه‌ی A از نیم خط Bx برابر $AH = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6.928$ می باشد، و چون $AH > AC$ است،

دایره، نیم خط Bx را قطع نمی کند. پس برای C یک نقطه به دست نمی آید و مسأله جواب ندارد.



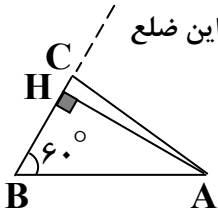
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{6} \approx 1.155 > 1 \Rightarrow \text{معادله‌ی مثلثاتی جواب ندارد.}$$

روش دوم:

مثال) با معلومات $AC = 3 \text{ cm}$ و $\hat{B} = 60^\circ$ و $AB = 5 \text{ cm}$ چند مثلث متمایز مشخص می شود؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بیشمار

جواب: گزینه ۱ درست است. روش اول: ابتدا زاویه B را برابر 60° درجه رسم می کنیم. و بر روی یک ضلع آن پاره خطی به اندازه AC جدا می کنیم. از نقطه A عمود AH را بر ضلع دیگر زاویه B رسم می کنیم. مکان راس C بر روی این ضلع



واقع است. از آنجایی که در مثلث قائم الزاویه ضلع روبروی زاویه 60° درجه برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

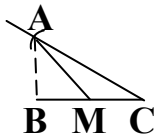
نتیجه می گیریم: $AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3} \times 5}{2} \approx 4.3 > 3$ در این صورت اندازه AH و تر از اندازه AC و تر از اندازه AC ضلع زاویه B قائمه کوچکتر است که این غیر ممکن است.

روش دوم: معادله ی مثلثاتی جواب جواب ندارد. $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{3}{\sin A} = \frac{5}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{6} > 1$

مثال) چند مثلث متمایز با معلومات $a = 4$ و $\hat{C} = 30^\circ$ و $m_a = 3$ می توان رسم کرد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بیش از دو مثلث (۴) نمی توان رسم کرد. (کنکور آزاد ریاضی ۷۸)

جواب: گزینه ۱ درست است. برای رسم این مثلث ابتدا زاویه 30° درجه به راس C را رسم می کنیم. روی یکی از اضلاع پاره خط



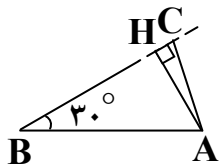
BC را به طول ۴ جدا کرده، به مرکز M (وسط BC) و به شعاع ۳ کمانی می زنیم مثلث ABC جواب مسأله است.

مثال) با معلومات $AC = 8 \text{ cm}$ و $\hat{B} = 30^\circ$ و $AB = 6 \text{ cm}$ چند مثلث متمایز مشخص می شود؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

جواب: گزینه ۲ درست است. روش اول: با توجه به شکل اگر ارتفاع AH را رسم کنیم

با توجه به اینکه در مثلث قائم الزاویه ABH ضلع روبرو به زاویه 30° درجه برابر نصف وتر است داریم:



$AH = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ چون $AH < AB < AC \Rightarrow 3 < 6 < 8$ می باشد پس دایره A و به شعاع ۸ سانتی متر امتداد

ضلع دیگر زاویه را در دو نقطه قطع می کند که یکی از آن ها غیر قابل قبول است. در نتیجه مسأله یک جواب دارد.

(به بیان بهتر ابتدا پاره خط $AB = 6 \text{ cm}$ را رسم می کنیم.

زاویه $\hat{B} = 30^\circ$ را رسم می کنیم (نیم خط Bx به وجود می آید).

دایره ای به مرکز A و به شعاع ۸ سانتیمتر رسم می کنیم، تا نیم خط Bx را در نقطه C قطع کند.

فاصله ی نقطه A از نیم خط Bx برابر $AH = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ می باشد، و چون $AC > AB$ و $AH < AC$ است،

دایره، نیم خط Bx را فقط در یک نقطه قطع می کند. پس برای C یک نقطه به دست می آید و مسأله یک جواب دارد.

روش دوم: $\frac{a}{\sin A} = \frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < 1$

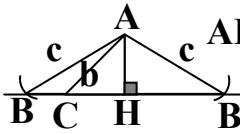
معادله دو جواب دارد یکی حاده و دیگری منفرجه بیشتر از 150° درجه که این مورد غیر قابل قبول است زیرا مجموع زاویه های داخلی

مثلث 180° درجه است.

مثال) چند مثلث با اطلاعات $h_a = 2$ و $b = 3$ و $c = 1$ می توان رسم کرد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار (کنکور آزاد ریاضی ۸۶ خارج از کشور)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. با توجه به شکل، مثلث ACH را با داشتن وتر $c = 1$ و یک ضلع $AH = h_a = 2$ نمی توان رسم کرد (ارتفاع وارد بر یک ضلع لزوماً کوچکتر از دو ضلع دیگر است). در نتیجه مسأله جواب ندارد.



(۶) چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن ۳ و ۵ باشد و یکی از ارتفاع ها برابر ۴ باشد؟

(۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۶ (کنکور آزاد ریاضی ۸۷ خارج از کشور)



جواب: گزینه ۱ درست است. ارتفاع به طول ۴ الزاماً به ضلع ۳ وارد می شود زیرا اگر ضلع به

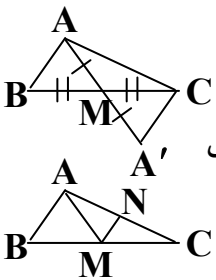
طول ۳ و ارتفاع به طول ۴ هم راس باشند آن وقت طول قائم بیشتر از خط مایل است که این امر نشدنی است. در نتیجه ارتفاع به طول ۴ باید به ضلع به طول ۳ وارد شود که در این حالت نیز ارتفاع در واقع همان ضلع سوم است

و یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ داریم.

(۷) در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $AC = 7$ و $AB = 5$ و میانه $AM = 4$ با خط کش و پرگار کدام نتیجه حاصل می شود؟

(۱) غیر قابل رسم (۲) جواب منحصر به فرد (۳) دو جواب متمایز (۴) فاقد جواب

جواب: گزینه ۲ صحیح است. برای رسم این مثلث با معلومات دو ضلع $AC = 7$ ، $AB = 5$ و میانه $AM = 4$ دو شیوه می توان داشت:



(۱) میانه AM را از طرف M به اندازه AM خود ادامه می دهیم تا نقطه A' حاصل شود. مثلث $AA'C$ را با

داشتن طول های $AC = 7$ ، $AB = 5$ و $2AM = 8$ رسم می کنیم. سپس میانه CM را به اندازه CM خود

از طرف M ادامه می دهیم تا نقطه B حاصل شود. مثلث ABC جواب مسأله است.

(۲) از نقطه M به نقطه N وسط AC وصل می کنیم. با توجه به عکس تالس، اضلاع مثلث AMN مشخص و برابر

دهیم تا به نقطه C برسیم، پاره خط CM را از طرف M به اندازه CM خود امتداد می دهیم تا نقطه N به اندازه AN خود امتداد می

دهیم تا به نقطه C برسیم، پاره خط CM را از طرف M به اندازه CM خود امتداد می دهیم تا نقطه B حاصل شود. مثلث ABC جواب مسأله است.

نکته: محل برخورد عمود منصف های اضلاع در مثلث حاده الزاویه داخل مثلث و مثلث قائم الزاویه وسط وتر و در مثلث منفرجه

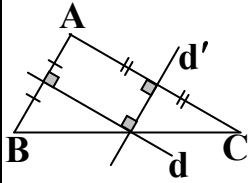


الزاویه خارج آن مثلث قرار دارد.

مثال) در مثلث ABC ، $AC = 7/5$ و $AB = 3$ و عمودمنصف های این دو ضلع بر هم عمود می باشند. فاصله ی نقطه ی تلاقی

عمودمنصف ها از وسط بزرگ ترین ضلع مثلث چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) صفر



جواب: گزینه ۴ صحیح است. اگر عمودمنصف دو ضلع AB و AC بر هم عمود باشند پس خود آن اضلاع

نیز بر هم عمود هستند، یعنی $\hat{A} = 90^\circ$ از طرفی عمودمنصف های اضلاع مثلث قائم الزامیه در وسط وتر آن

همرسند. پس فاصله ی نقطه ی تلاقی عمودمنصف ها از وسط وتر صفر است.

نکته: در هر مثلث، ضلع روبه رو به زاویه ی بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه رو به زاویه ی کوچکتر و برعکس.

قضیه: در هر مثلث مجموع زاویه های داخلی، 180° درجه است. یعنی $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

نکته: اگر نقطه O را به دلخواه در درون مثلث MNP انتخاب کنیم آنگاه زاویه NOP از زاویه NMP بزرگتر است.

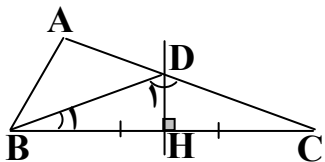


۸) در مثلث ABC ($\hat{C} = 20^\circ$)، عمودمنصف ضلع BC ، ضلع AC را در نقطه ی D قطع می کند. اندازه ی زاویه ی \hat{ADB} کدام

است؟ ($\hat{B} > \hat{C}$)

- (۱) ۱۰ درجه (۲) ۲۰ درجه (۳) ۳۰ درجه (۴) ۴۰ درجه

جواب: گزینه ۴ صحیح است. نقطه ی D روی عمودمنصف ضلع BC واقع است، پس از دو سر آن به یک فاصله است، یعنی



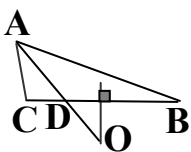
$DB = DC$ ، بنابراین مثلث BDC متساوی الساقین است و نتیجه می گیریم که $\hat{B}_1 = \hat{C} = 20^\circ$

$$\Delta BDC: \hat{D}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = 140^\circ$$

$$\hat{D}_1 + \hat{ADB} = 180^\circ \Rightarrow 140^\circ + \hat{ADB} = 180^\circ \Rightarrow \hat{ADB} = 40^\circ$$

مثال) در مثلثی $\hat{A} = 60^\circ$ و $\hat{B} = 20^\circ$ است. زاویه ی بین نیمساز A و عمودمنصف BC چند درجه است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۵۰ (۳) ۴۰ (۴) ۳۰



$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (60 + 20) = 100^\circ$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است.

$$\hat{O}DB = \hat{A}DC = 180 - (100 + 30) = 50^\circ$$

$$\hat{O} = 180 - (90 + 50) = 40^\circ$$

مثال) در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره خط های $BM = BA$ و $CN = CA$ را جدا می کنیم. اگر زاویه $\hat{A} = 72^\circ$ باشد، زاویه $\hat{M\hat{A}N}$ چند درجه است؟

(کنکور سراسری تجربی ۸۶)

۴۲ (۴)

۴۸ (۳)

۵۲ (۲)

۵۴ (۱)



$$BM = BA \Rightarrow \hat{B\hat{M}A} = \hat{B\hat{A}N} + \hat{M\hat{A}N}$$

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

$$CN = CA \Rightarrow \hat{C\hat{N}A} = \hat{C\hat{A}M} + \hat{M\hat{A}N}$$

و

$$\hat{B\hat{M}A} + \hat{C\hat{N}A} + \hat{M\hat{A}N} = 180 \Rightarrow \hat{B\hat{A}N} + \hat{M\hat{A}N} + \hat{C\hat{A}M} + \hat{M\hat{A}N} + \hat{M\hat{A}N} = 180$$

$$\Rightarrow \hat{A} + 2\hat{M\hat{A}N} = 180 \Rightarrow 72 + 2\hat{M\hat{A}N} = 180 \Rightarrow 2\hat{M\hat{A}N} = 108 \Rightarrow \hat{M\hat{A}N} = 54^\circ$$

۹) در مثلث متساوی الساقین ABC ، طول BD نیمساز داخلی زاویه B با طول قاعده BC برابر است، زاویه $\hat{A\hat{D}B}$ کدام است؟

۱۴۴ (۴) درجه

۱۰۸ (۳) درجه

۷۲ (۲) درجه

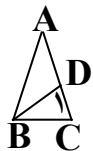
۳۶ (۱) درجه



جواب: گزینه ۳ صحیح است. روش اول: $AB = AC \Rightarrow B = C = 2x, BD = BC \Rightarrow D = C = 2x$

$$\Rightarrow x + 2x + 2x = 180 \Rightarrow 5x = 180 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow 2x = 72 \Rightarrow \hat{A\hat{D}B} = 180 - 72 = 108$$

روش دوم: $AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}, BD = BC \Rightarrow \hat{D} = \hat{C}$ و $\triangle BDC: 2\hat{C} + \frac{\hat{C}}{2} = 180 \Rightarrow 5\hat{C} = 360 \Rightarrow \hat{C} = 72$



$$\hat{A\hat{D}B} = 180 - \hat{D} = 180 - 72 = 108$$

نکته: در مثلث متساوی الاضلاع میانه، عمود منصف، ارتفاع و نیمساز نظیر اضلاع آن بر هم منطبق اند.

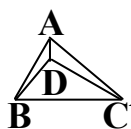
نکته: در بررسی تست های کنکور به سؤال هایی برمی خوریم که مجموع و یا تفاضل دو زاویه مثلث معلوم باشند و شرط دیگری

که روی زاویه ها تأثیر بگذارد وجود نداشته باشد. هر چند راه حل های ساده و یا گاه مشکل و یا فرمولی برای اینگونه سؤال ها وجود

دارد ولی شاید در اینگونه سؤال ها به توان با آزمون عدد جواب سؤال را تشخیص داد.

نکته: زاویه های بین دو نیمساز زاویه های درونی مثلث: در هر مثلث اندازه های زاویه های بین نیمسازهای

داخلی دو زاویه، برابر است با نصف اندازه های زاویه های سوم بعلاوه 90° درجه بنابراین اگر نقطه D محل برخورد نیمساز های زاویه



$$\hat{A\hat{D}C} = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} \text{ و } \hat{A\hat{D}B} = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2} \text{ و } \hat{B\hat{D}C} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

های درونی مثلث ABC باشد داریم:

مثال) در مثلث متساوی الساقین ABC به رأس $\hat{A} = 46^\circ$ نقطه‌ی N درون آن طوری قرار گرفته که اگر از N به B و C وصل کنیم \hat{NCA} و \hat{NBC} با هم برابرند آنگاه اندازه‌ی \hat{BNC} برابر است با:

- (۱) 67° (۲) 113° (۳) 23° (۴) 157° درجه



$$\hat{A} = 46 \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 67^\circ$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است. روش اول:

$$\hat{BNC} = 180 - (\hat{NBC} + \hat{NCB}) = 180 - (\hat{NCA} + \hat{NCB}) = 180 - 67 = 113^\circ$$

روش دوم: $\hat{A} = 46 \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 67^\circ$ حال با عدد گذاری جواب تست را مشخص می‌نماییم مثلاً

$$\hat{NCA} = \hat{NBC} = 17 \Rightarrow \hat{NCB} = \hat{NBA} = 50 \Rightarrow \hat{BNC} = 180 - (17 + 50) = 113^\circ$$

روش سوم: فرض کنیم NB و NC نیمسازهای درونی دو زاویه‌ی B و C باشد پس:

$$\hat{BNC} = 180 - \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 180 - \frac{B}{2} = 180 - 67 = 113^\circ$$

روش چهارم: فرض کنیم NB و NC نیمسازهای درونی دو زاویه‌ی B و C باشد پس:

$$90 + \frac{A}{2} = 90 + 23 = 113^\circ$$

مثال) در مثلث متساوی الساقین ABC به رأس $\hat{A} = 20^\circ$ نقطه‌ی N درون آن طوری قرار گرفته که اگر از N به B و C وصل کنیم \hat{NCA} و \hat{NBC} با هم برابرند آنگاه اندازه‌ی \hat{BNC} برابر است با:

- (۱) 100° (۲) 80° (۳) 120° (۴) 140° درجه



$$\hat{A} = 20 \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 80$$

جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول:

$$\hat{BNC} = 180 - (\hat{NBC} + \hat{NCB}) = 180 - (\hat{NCA} + \hat{NCB}) = 180 - 80 = 100^\circ$$

روش دوم: $\hat{A} = 20 \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 80$ حال با عدد گذاری جواب تست را مشخص می‌نماییم مثلاً

$$\hat{NCA} = \hat{NBC} = 70 \Rightarrow \hat{NCB} = \hat{NBA} = 10 \Rightarrow \hat{BNC} = 180 - (10 + 70) = 100^\circ$$

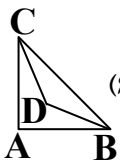
روش سوم: فرض کنیم NB و NC نیمسازهای درونی دو زاویه‌ی B و C باشد پس:

$$\hat{BNC} = 180 - \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 180 - \frac{B}{2} = 180 - 80 = 100^\circ$$

روش چهارم: فرض کنیم NB و NC نیمسازهای درونی دو زاویه‌ی B و C باشد پس:

$$90 + \frac{A}{2} = 90 + 10 = 100^\circ$$

مثال) در مثلث ABC نیمسازهای داخلی دو زاویه B و C با یکدیگر چه زاویه ای می سازند؟



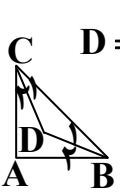
(کنکور آزاد ریاضی ۶۷)

$$90 + \frac{A}{2} \quad (4)$$

$$2A \quad (3)$$

$$\frac{A}{2} \quad (2)$$

$$B + C \quad (1)$$



جواب: گزینه ۴ صحیح است. روش اول: $D = 180 - \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 180 - \frac{B+C}{2} = 90 + \frac{180 - (B+C)}{2} = 90 + \frac{A}{2}$

روش دوم: آزمون عدد: $\hat{B} = \hat{C} = \hat{A} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{D} = 180 - (30 + 30) = 120^\circ = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$

مثال) در مثلث قائم الزاویه با زوایای $\hat{A} = 20^\circ$ و $\hat{C} = 90^\circ$ زاویه بین نیمساز زاویه A و B کدام است؟

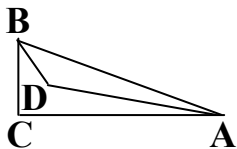
(کنکور آزاد تجربی ۸۶)

$$135^\circ \quad (4)$$

$$110^\circ \quad (3)$$

$$35^\circ \quad (2)$$

$$10^\circ \quad (1)$$



جواب: گزینه ۴ صحیح است. روش اول: $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C}) = 180 - (20 + 90) = 70$

$$\Rightarrow \hat{A}DB = 180 - \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}\right) = 180 - \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right) = 180 - \frac{20 + 70}{2} = 135^\circ$$

$$\hat{A}DB = 90 + \frac{\hat{C}}{2} = 90 + 45 = 135^\circ$$

روش دوم:

۱۰) در مثلث ABC نیمسازهای زاویه داخلی، در نقطه O ، متقاطع اند. اگر زاویه های AOB و BOC و COA متناسب با

اعداد ۷ و ۶ و ۵ باشند، بزرگترین زاویه ای این مثلث چند درجه است؟

(کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۷)

$$110 \quad (4)$$

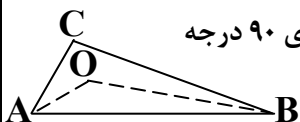
$$100 \quad (3)$$

$$90 \quad (2)$$

$$80 \quad (1)$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است. $\hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{C}OA = 7x + 6x + 5x = 360^\circ \Rightarrow 18x = 360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}OB = 140^\circ \text{ و } \hat{B}OC = 120^\circ \text{ و } \hat{C}OA = 100^\circ$$



در هر مثلث اندازهی زاویهی بین نیمسازهای داخلی دو زاویه، برابر است با نصف اندازهی زاویهی سوم بعلاوهی ۹۰ درجه

$$\hat{A}OB = 90 + \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow 140^\circ = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 100^\circ$$

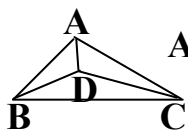
مثال) در مثلثی که زاویه ها به نسبت ۲ و ۳ و ۷ (زاویه بزرگتر A) اگر D محل تلاقی سه نیمساز باشد حاصل $\hat{A}DB + \hat{A}DC - \hat{B}DC$

کدام است؟

(۱) 105° (۲) 75° (۳) 60° (۴) 90° (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۷)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. $\hat{A} = 105$ و $\hat{B} = 45$ و $\hat{C} = 30$. $2x + 3x + 7x = 180 \Rightarrow 12x = 180 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow \hat{A} = 105$ و $\hat{B} = 45$ و $\hat{C} = 30$.

روش اول: $\hat{B}DC = 90 + \frac{\hat{A}}{2} = 90 + \frac{105}{2} = 142.5 \Rightarrow \hat{A}DB + \hat{A}DC - \hat{B}DC = 360 - 2(142.5) = 75$ روش اول:



روش دوم: $\hat{A}DB + \hat{A}DC - \hat{B}DC = (180 - \frac{105 + 45}{2}) + (180 - \frac{105 + 30}{2}) - (180 - \frac{45 + 30}{2}) =$

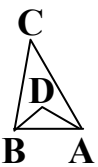
$$(180 - 75) + (180 - 67.5) - (180 - 37.5) = 105 + 112.5 - 142.5 = 75$$

روش سوم: $\hat{A}DB + \hat{A}DC - \hat{B}DC = 90 + \frac{C}{2} + 90 + \frac{B}{2} - 90 - \frac{A}{2} = 90 + (\frac{C+B-A}{2})$ روش سوم:

$$= 90 + \frac{30 + 45 - 105}{2} = 90 - 15 = 75$$

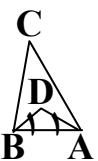
مثال) در مثلث ABC زاویه‌ی بین نیمساز داخلی زاویه A و نیمساز داخلی زاویه B برابر ۱۱۰ درجه است. زاویه C کدام است؟

(۱) 70° (۲) 110° (۳) 40° (۴) 35° (کنکور آزاد ریاضی ۷۹)



جواب: گزینه ۳ صحیح است. روش اول: $\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - 2(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}) = 180 - 2(180 - \hat{A}DB)$

$$= 180 - 2(180 - 110) = 180 - 140 = 40^\circ$$

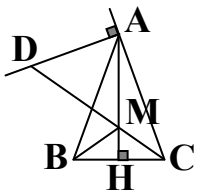


روش دوم: $\hat{A}DB = 90 + \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow 110 = 90 + \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$ روش دوم:

روش سوم: آزمون عدد: $\hat{D} = 110$ و $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 35$ و $\hat{D} = 110 \Rightarrow \hat{C} = 180 - (70 + 70) = 40^\circ$

مثال) در مثلث متساوی الساقین $(AB = AC)ABC$ در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویه داخلی C را در D قطع می کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد، AD برابر کدام است؟

- (۱) AM (۲) MD (۳) MC (۴) $\frac{1}{2}AC$ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۴)



جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: $\frac{\hat{C}}{2} = \alpha = \hat{ACM} \Rightarrow \hat{A} = 180 - 2\alpha \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 90 - \alpha$

$$\hat{AMD} = \hat{CAM} + \hat{ACM} = 90 - \alpha + \alpha = 90 - \alpha$$

$$\hat{ADC} = 90 - \alpha \Rightarrow \hat{ADC} = \hat{AMD} \Rightarrow AD = AM$$

روش دوم: در مثلث های قائم الزاویه ADM و CHM داریم: $\hat{ADM} = 90 - \frac{\hat{C}}{2}$ و $\hat{AMD} = \hat{MHC} = 90 - \frac{\hat{C}}{2}$

و در نتیجه: $\hat{AMD} = \hat{D} \Rightarrow AD = AM$ بنابراین

روش سوم: زاویه منفرجه بین دو نیمساز داخلی B و C برابر $90 + \frac{\hat{A}}{2}$ است پس: $\hat{AMD} = \frac{90 + \frac{\hat{A}}{2}}{2} = 45 + \frac{\hat{A}}{4}$

و در ADM مثلث داریم: $\hat{DAM} = 90 - \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{D} = 180 - ((45 + \frac{\hat{A}}{4}) + (90 - \frac{\hat{A}}{2})) = 45 + \frac{\hat{A}}{4}$

و در نتیجه: $\hat{AMD} = \hat{D} \Rightarrow AD = AM$ بنابراین

روش چهارم آزمون عدد: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \hat{D} = \hat{AMD} = 60^\circ \Rightarrow AD = AM$

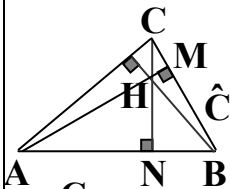


نکته: در مثلث ABC زاویه بین دو ارتفاع AH و BH' برابر $180 - \hat{C}$ و \hat{C} است

مثال) در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 40^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$ اگر نقطه تلاقی سه ارتفاع H باشد زاویه \hat{CHA} چند درجه است؟

- (۱) ۱۰۰ درجه (۲) ۱۲۰ درجه (۳) ۱۴۰ درجه (۴) ۸۰ درجه (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۰)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. روش اول: در هر مثلث مجموع زاویه های داخلی 180 درجه است.



$$\hat{C} = 180 - (60 + 40) = 80^\circ \text{ و } \hat{ACH} = 50^\circ \text{ و } \hat{CAH} = 10^\circ \Rightarrow \hat{CHA} = 180 - (50 + 10) = 120^\circ$$

روش دوم: در مثلث ABC زاویه بین دو ارتفاع AH و CH برابر $180 - \hat{B}$ و \hat{B} است

$$\hat{CHA} = 180 - 60 = 120^\circ$$

در نتیجه:

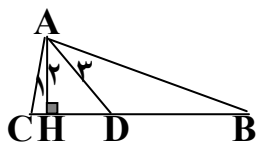
روش سوم: مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی 360 درجه است. در نتیجه $\hat{B} + \hat{MHN} = 180^\circ$

$$\hat{CHA} = \hat{MHN} = 180 - \hat{B} = 180 - 60 = 120^\circ$$

پس:



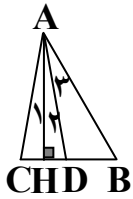
نکته: زاویه‌ی بین نیمساز و ارتفاع نظیر یک رأس در مثلث: در مثلث ABC ، زاویه‌ی بین ارتفاع AH و



نیمساز داخلی AD برابر است با: $\frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$

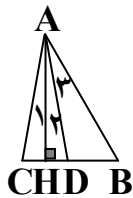
مثال) در مثلث ABC زاویه‌ی ای که نیمساز و ارتفاع نظیر رأس A با هم پدید می‌آورند برابر کدام است؟

$$\frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2} \quad (۱) \quad \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2} \quad (۲) \quad \frac{|\hat{B} + \hat{C}|}{2} \quad (۳) \quad \frac{|\hat{B} + \hat{C}|}{2} \quad (۴)$$



جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: آزمون عدد مثلاً: فرض کنیم $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ$

$$\text{پس: } \hat{A}_1 = 30^\circ \text{ و } \hat{A}_3 = 45^\circ \text{ و در نتیجه: } \hat{A}_2 = 15^\circ = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$$



روش دوم: در مثلث ABC ، زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز AD برابر است با: $\frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$

$$\text{زیرا: } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \frac{\hat{A}}{2}$$

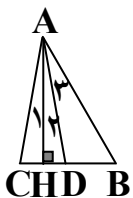
$$\hat{A}_1 + \hat{C} = 90^\circ \text{ و } \hat{A}_1 + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \text{ارتفاع } AH$$

$$\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 + \hat{B} = \hat{A}_1 + \hat{C} \Rightarrow 2\hat{A}_2 + \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$$

(۱) در مثلث ABC ، $\hat{A} = 40^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$ است. زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز AD چقدر است؟

$$(۱) 10^\circ \quad (۲) 20^\circ \quad (۳) 30^\circ \quad (۴) 50^\circ \quad (\text{کنکور آزاد تجربی } ۷۲)$$

$$\text{جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \frac{\hat{A}}{2} = 20^\circ$$



$$\text{ارتفاع } AH \Rightarrow \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 30^\circ$$

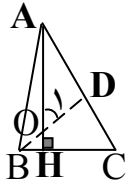
$$\Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = \hat{A}_2 + \frac{\hat{A}}{2} = \hat{A}_2 + 20^\circ = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 10^\circ$$

روش دوم: زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز AD برابر است با: $\frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$ بنابراین $\frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2} = \frac{|60 - 40|}{2} = 10^\circ$ و $\hat{C} = 80^\circ$



نکته: در مثلث ABC ، زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز خارجی AD برابر است با: $۹۰^\circ + \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{۲}$

نکته (زاویه‌ی بین ارتفاع نظیر یک رأس و نیمساز نظیر رأس دیگر):



در مثلث ABC ، زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز داخلی رأس B برابر است با: $\frac{\hat{A} + \hat{C}}{۲}$

مثال: در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، رابطه‌ی $\frac{\hat{A}}{۳} = \frac{\hat{B}}{۴} = \frac{\hat{C}}{۵} = \frac{۵\hat{D}}{۱۲}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه‌ی حاده بین نیمسازهای

داخلی دو زاویه‌ی متقابل \hat{A} و \hat{C} چند درجه است؟

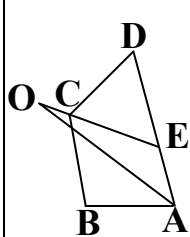
(کنکور سراسری تجربی ۹۶)

۳۵ (۴)

۳۰ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)



جواب: گزینه ۱ صحیح است. $\frac{\hat{A}}{۳} = \frac{\hat{B}}{۴} = \frac{\hat{C}}{۵} = \frac{۵\hat{D}}{۱۲} = x \Rightarrow \hat{A} = ۳x$ و $\hat{B} = ۴x$ و $\hat{C} = ۵x$ و $\hat{D} = \frac{۱۲}{۵}x$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰ \Rightarrow ۳x + ۴x + ۵x + \frac{۱۲}{۵}x = ۳۶۰ \Rightarrow ۷۲x = ۵ \times ۳۶۰ \Rightarrow x = ۲۵$$

$$\hat{A} = ۷۵ \text{ و } \hat{B} = ۱۰۰ \text{ و } \hat{C} = ۱۲۵ \text{ و } \hat{D} = ۶۰$$

$$\hat{OEA} = \frac{\hat{C}}{۲} + \hat{D} = \frac{۱۲۵}{۲} + ۶۰ = \frac{۲۴۵}{۲} \Rightarrow \hat{AOC} = ۱۸۰ - (\frac{\hat{A}}{۲} + \hat{OEA}) = ۱۸۰ - (\frac{۷۵}{۲} + \frac{۲۴۵}{۲}) = ۲۰$$

مثال: در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، رابطه‌ی $\frac{\hat{A}}{۴} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{۱۱}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه‌ی حاده بین نیمسازهای

داخلی دو زاویه‌ی مجاور \hat{A} و \hat{B} ، چند درجه است؟

(کنکور سراسری تجربی ۹۶ خارج از کشور)

۷۵ (۴)

۷۰ (۳)

۶۰ (۲)

۵۰ (۱)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. $\frac{\hat{A}}{۴} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{۱۱} = x \Rightarrow \hat{A} = ۴x$ و $\hat{B} = ۳x$ و $\hat{C} + \hat{D} = ۱۱x$

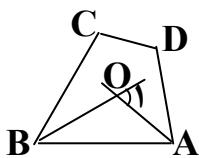
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰ \Rightarrow ۴x + ۳x + ۱۱x = ۳۶۰ \Rightarrow ۱۸x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۲۰$$

$$\hat{A} = ۸۰ \text{ و } \hat{B} = ۶۰ \text{ و } \hat{C} + \hat{D} = ۲۲۰$$

$$\hat{O}_1 = \frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{۸۰}{۲} + \frac{۶۰}{۲} = ۷۰^\circ$$

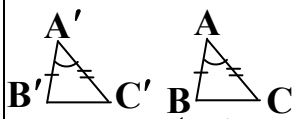
(زاویه‌ی خارجی مثلث AOB)

دو مثلث همنهشت: دو مثلث قابل انطباق برهم



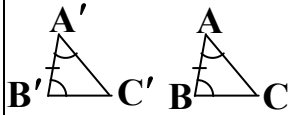
حالت های همنهشتی دو مثلث : دو مثلث به حالت های زیر با یکدیگر هم نهشت اند :

(۱) (ض ز ض) هرگاه دو ضلع و زاویه ی بین از مثلثی با دو ضلع و زاویه ی بین از مثلث دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند.



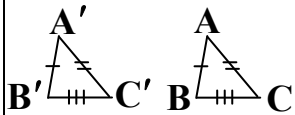
یعنی اگر $AB = A'B'$ و $\hat{A} = \hat{A}'$ و $AC = A'C'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

(۲) (ز ض ز) هرگاه دو زاویه و ضلع بین از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین از مثلث دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند.



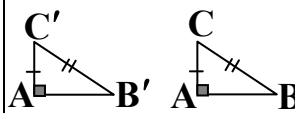
یعنی اگر $\hat{A} = \hat{A}'$ و $AB = A'B'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

(۳) (ض ض ض) هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند.



یعنی اگر $AB = A'B'$ و $BC = B'C'$ و $AC = A'C'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

(۴) هرگاه وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند.



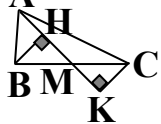
یعنی اگر $AB = A'B'$ و $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$ و $BC = B'C'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

(۵) هرگاه وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند.



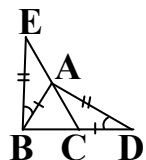
یعنی اگر $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$ و $BC = B'C'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

نکته : هر دو رأس مثلث از میانه ی نظیر رأس سوم آن به یک فاصله اند. یعنی $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \Rightarrow BH = CK$ و AM میانه



مثال (با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه گیری درست است؟)

(۱) $AB = AC$ (۲) $AB = BC$ (۳) $AE = BC$ (۴) $AE = AC$



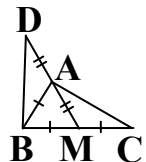
(کنکور سراسری تجربی ۸۵ خارج از کشور)

$\Delta ABE \cong \Delta ADC$ (ض ز ض) $\Rightarrow AE = AC$

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

(۱۲) در شکل مقابل $\hat{D} + \hat{C} = 61^\circ$ ، اندازه ی \hat{A} چند درجه است؟

(۱) ۳۹ (۲) ۶۱ (۳) ۵۸ (۴) ۵۶ (کنکور سراسری تجربی ۸۹)



جواب: گزینه ۳ صحیح است.

(ض ز ض) $\Delta ABD \cong \Delta CMA \Rightarrow \hat{B}AD = \hat{A}MC$ (مکمل های دو زاویه ی برابر با هم مساوی اند)

$\Rightarrow \hat{C} = \hat{A}BD \Rightarrow \hat{A}BC = 180 - 2 \times \hat{B}AM = 180 - 2(\hat{A}BD + \hat{D}) = 180 - 2(\hat{C} + \hat{D}) = 180 - 122 = 58$

مثلث متساوی الساقین : هرگاه در مثلثی دو ضلع برابر باشند مثلث را متساوی الساقین می نامیم. به هر یک از دو ضلع

مساوی یک ساق مثلث گوئیم.

تذکر: (۱) در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند و برعکس.



یعنی اگر در مثلث ABC ، $AB = AC$ باشد آنگاه: $\hat{B} = \hat{C}$ و برعکس.

(۲) در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع های نظیر ساق ها با هم برابرند و برعکس.



یعنی اگر در مثلث ABC ، $AB = AC$ و BD و CE ارتفاع های نظیر ساق ها باشند آنگاه: $BD = CE$ و برعکس.

(۳) در هر مثلث متساوی الساقین میانه های نظیر ساق ها با هم برابرند و برعکس.



یعنی اگر در مثلث ABC ، $AB = AC$ و BD و CE میانه های نظیر ساق ها باشند آنگاه: $BD = CE$ و برعکس.

(۴) در هر مثلث متساوی الساقین نیمساز های داخلی نظیر ساق ها با هم برابرند و برعکس.



یعنی اگر در مثلث ABC ، $AB = AC$ و BD و CE نیمساز های داخلی باشند آنگاه: $BD = CE$ و برعکس.

(۵) در هر مثلث متساوی الساقین میانه و نیمساز و ارتفاع و عمودمنصف وارد بر قاعده بر هم منطبق اند.



مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC داریم: $\hat{B} = 2\hat{A}$ ، بزرگترین زاویه ی مثلث ADE ، چند برابر کوچکترین زاویه ی مثلث

ABC ، است؟

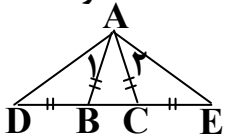
(هنر ۸۶)

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)



جواب: گزینه ۲ صحیح است. روش اول: در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند.

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 2\hat{A} \text{ و } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{A} + 2\hat{A} = 180 \Rightarrow 5\hat{A} = 180 \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ$$

زاویه ی $D\hat{A}E$ بزرگترین زاویه ی مثلث ADE است.

$$AB = BD \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_1 \xrightarrow{\text{(زاویه خارجی)}} \hat{B} = 2\hat{A}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = 36^\circ$$

$$D\hat{A}E = 36 + 36 + 36 = 3\hat{A} \text{ بنابراین } \hat{A}_2 = 36^\circ$$

روش دوم: در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند.

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 2\hat{A}$$

زاویه ی $D\hat{A}E$ بزرگترین زاویه ی مثلث ADE است.

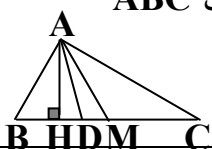
$$AB = BD \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_1 \xrightarrow{\text{(زاویه خارجی)}} \hat{B} = 2\hat{A}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}$$

$$D\hat{A}E = \hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = 3\hat{A} \text{ بنابراین } \hat{A}_2 = \hat{A}$$

نکته: در هر مثلث نیمساز زاویه هر رأس بین ارتفاع و میانه گذرنده از آن رأس واقع است مگر در حالت رأس مثلث متساوی الساقین

و یا مثلث متساوی الاضلاع که هر سه بر هم منطبق اند. یعنی اگر AH ارتفاع و AD نیمساز و AM میانه مثلث ABC

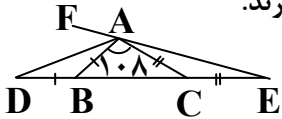
باشند آن گاه: $AH < AD < AM$ و در حالت خاص: $AH = AD = AM$



۱۳) در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 108^\circ$ است، ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می دهیم، کوچکترین زاویه خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۵۴ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۳)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. روش اول: در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند.



$$CE = CA \Rightarrow \hat{EAC} = \hat{AEC} \text{ و } BD = BA \Rightarrow \hat{DAB} = \hat{ADB}$$

کوچکترین زاویه خارجی مثلث ADE نظیر بزرگترین زاویه داخلی آن است پس زاویه \hat{FAD} کوچکترین زاویه خارجی

$$\hat{ADB} + \hat{DAB} + 108 + \hat{EAC} + \hat{AEC} = 180 \Rightarrow 2\hat{ADB} + 108 + 2\hat{AEC} = 180$$
 این مثلث می باشد.

$$\Rightarrow \hat{ADB} + \hat{AEC} = \frac{180 - 108}{2} = 36 \Rightarrow \hat{FAD} = \hat{ADB} + \hat{AEC} = 36^\circ$$

روش دوم: حالت خاص: مثلث ABC متساوی الساقین باشد. در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 36^\circ \Rightarrow \hat{ABD} = \hat{ACE} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \Delta ABD \cong \Delta ACE \Rightarrow \hat{D} = \hat{E} = 18^\circ$$
 برابرند.

کوچکترین زاویه خارجی مثلث ADE نظیر بزرگترین زاویه داخلی آن است پس زاویه \hat{FAD} کوچکترین زاویه خارجی و

زاویه D کوچکترین زاویه داخلی این مثلث می باشند. $\hat{FAD} = \hat{D} + \hat{E} = 2\hat{D} = 36^\circ$ (زاویه خارجی مثلث ADE)

$$\hat{B} = \hat{C} = 36^\circ \Rightarrow \hat{ADE} = \hat{DAB} = \hat{CAE} = \hat{CEA} = 18^\circ \Rightarrow \hat{FAD} = 36^\circ$$
 روش سوم: آزمون عدد

نکته: اگر اندازه سه زاویه مثلثی با اعداد a و b و c متناسب باشد و داشته باشیم $a = b + c$ ، آنگاه مثلث فوق قائم الزاویه است.

مثال: اندازه سه زاویه مثلثی با اعداد ۵ و ۴ و ۱ متناسب است این مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی الاضلاع (۲) متساوی الساقین (۳) قائم الزاویه (۴) منفرجه الزاویه (کنکور سراسری ریاضی ۶۵)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. زاویه های مثلث با اعداد ۱ و ۴ و ۵ متناسب است پس زاویه های آن به صورت x و $4x$ و $5x$ است.

$$x + 4x + 5x = 180 \Rightarrow 10x = 180 \Rightarrow x = 18$$

در نتیجه زاویه های مثلث ۱۸ و ۷۲ و ۹۰ درجه اند.

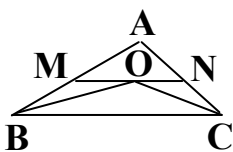
مثال: در مثلث ABC از نقطه O محل برخورد نیمسازهای داخلی زاویه های B و C خطی موازی BC رسم می کنیم تا اضلاع

AB و AC را به ترتیب در M و N قطع کند. اگر $AB = 7$ و $AC = 5$ باشد محیط مثلث AMN کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۷

$$MN \parallel BC \text{ مورب } OB \Rightarrow \hat{MOB} = \hat{OBC} \text{ (۱)}$$
 جواب: گزینه ۳ صحیح است.

$$\hat{MBO} = \hat{OBC} \xrightarrow{\text{(۱)}} \hat{MBO} = \hat{MOB} \Rightarrow OM = MB$$

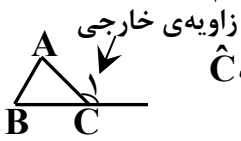


$$ON = NC$$

به طریق مشابه داریم:

$$\Delta AMN : AM + OM + ON + AN = AM + MB + NC + AN = AB + AC = 7 + 5 = 12$$

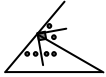
نکته: الف: اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی مثلث برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور آن. یعنی $\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$



ب: اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی مثلث از هر زاویه‌ی داخلی غیر مجاور آن بزرگتر است. یعنی $\hat{C}_1 > \hat{B}$ و $\hat{C}_1 > \hat{A}$

پ: در هر مثلث مجموع زاویه‌های خارجی، ۳۶۰ درجه است.

ت: نیمساز زاویه‌ی داخلی و خارجی هر رأس از مثلث بر هم عمودند.

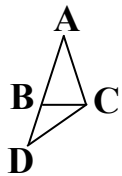


ث: در هر مثلث که در آن نیمساز زاویه‌ی خارجی یک رأس موازی ضلع مقابل به آن رأس باشد، مثلث متساوی الساقین است و برعکس.

مثال: در مثلث متساوی الساقین $(AB = AC)ABC$ ، ساق AB را به اندازه‌ی $BD = BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر

AC باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶ (کنکور سراسری تجربی ۹۴ خارج از کشور)

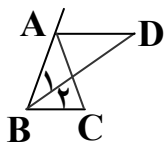


جواب: گزینه ۴ صحیح است. $AB = AC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$ (۱) و $BC = BD \Rightarrow \hat{D} = \hat{BCD}$ (۲)

و $AC = CD \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}$ (۳) و $\hat{A} = \hat{D} + \hat{BCD}$ (زاویه خارجی $\Delta ABCD$) (۴)

$$\Delta ABC: \hat{A} + \hat{D} + \hat{ACB} + \hat{BCD} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{A} + 2\hat{A} + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ$$

نکته: اگر در مثلث متساوی الساقین ABC داشته باشیم $AB = AC$



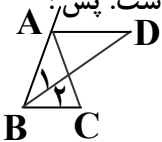
و نیمساز داخلی زاویه‌ی B نیمساز خارجی زاویه‌ی A را در D قطع کرده باشد، آن گاه $AD = AB$

مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC ، $(AB = AC)$ نیمساز خارجی زاویه‌ی A و نیمساز داخلی زاویه‌ی B در نقطه‌ی D

متلاقی اند. طول پاره خط AD برابر کدام جزء مثلث است؟

- (۱) AC (۲) شعاع دایره‌ی محیطی (۳) BC (۴) طول نیمساز داخلی زاویه B (کنکور سراسری تجربی ۷۳)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: چون در هر مثلث متساوی الساقین، نیمساز زاویه‌ی خارجی رأس، موازی قاعده است. پس:



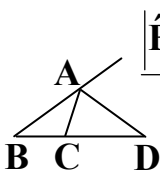
$$\hat{D} = \hat{B}_2 \text{ و } \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow \hat{D} = \hat{B}_1$$

$$\Rightarrow AD = AB = AC \text{ متساوی الساقین است. } \Rightarrow ABD$$

$$\hat{B} = \hat{C} = \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{CAD} = 60^\circ \Rightarrow \hat{D} = \hat{ABD} = 30^\circ \Rightarrow AD = AB = AC$$

روش دوم: آزمون عدد:

نکته: زاویه‌ی بین نیمساز خارجی با امتداد ضلع رو به روی آن زاویه در مثلث: اگر AD

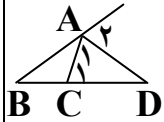


نیمساز خارجی زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد آنگاه زاویه‌ی این نیمساز با امتداد ضلع BC برابر است با: $\frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$

۱۴) زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۳ و ۱ می باشند. نیمساز زاویه خارجی یکی از زاویه ها، ضلع مقابل را تحت چند درجه قطع می کند؟

(۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۴۵ (کاردانی به کارشناسی سراسری ۸۶)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. $\hat{C} = 108^\circ$ و $\hat{A} = \hat{B} = 36^\circ \Rightarrow x + x + 3x = 180 \Rightarrow 5x = 180 \Rightarrow x = 36$

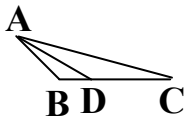


روش اول: $\hat{C}_1 = 72^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{180 - 36}{2} = 72^\circ \Rightarrow \hat{D} = 180 - (\hat{A}_1 + \hat{C}_1) = 180 - (36 + 72) = 36^\circ$

روش دوم: با توجه به اینکه اگر AD نیمساز خارجی زاویه A در مثلث ABC باشد آنگاه زاویه‌ی این نیمساز با امتداد ضلع

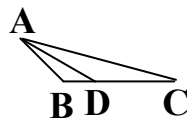
$$\hat{D} = \frac{|B - C|}{2} = \frac{|36 - 108|}{2} = 36^\circ \quad BC \text{ برابر است با: } \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2} \text{ نتیجه می شود:}$$

نکته: زاویه‌ی بین نیمساز داخلی با ضلع رو به روی آن زاویه در مثلث: اگر AD نیمساز داخلی



زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد آنگاه زاویه‌ی این نیمساز با ضلع BC برابر است با: $90 \pm \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$

نکته: اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$ آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز داخلی زاویه‌ی A و ضلع BC برابر



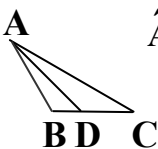
است با: $90 - \frac{\alpha}{2}$ و زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز خارجی زاویه‌ی A و ضلع BC برابر است با: $\frac{\alpha}{2}$

نکته: اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز داخلی (نیمساز خارجی) زاویه‌ی

A و ضلع BC برابر ۴۵ درجه است.

مثال: اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ ، زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و ضلع BC برابر است با:

(۱) ۳۰ درجه (۲) ۴۵ درجه (۳) ۶۰ درجه (۴) ۱۵ درجه (کنکور سراسری تجربی ۵)



جواب: گزینه ۲ صحیح است. روش اول: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{B} - 90 = 180 \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{B} = 270$

$$\Rightarrow 2\hat{DAB} + 2\hat{B} = 270 \Rightarrow \hat{DAB} + \hat{B} = 135 \Rightarrow \hat{ADB} = 45$$

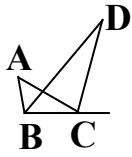
روش دوم: اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز داخلی (نیمساز خارجی) زاویه‌ی

A و ضلع BC برابر ۴۵ درجه است.

روش سوم: آزمون عدد $\hat{C} = 30 \Rightarrow \hat{A} = 30 \Rightarrow \hat{BAD} = 15 \Rightarrow \hat{ADB} = 45^\circ$

روش چهارم: اگر AD نیمساز داخلی زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد آنگاه زاویه‌ی این نیمساز با ضلع BC

$$\text{برابر است با: } 90 \pm \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2} \text{ در نتیجه: } 90 - \frac{90}{2} = 45^\circ$$

نکته: زاویه بین نیمساز داخلی یک زاویه و نیمساز خارجی زاویه دیگر در مثلث:

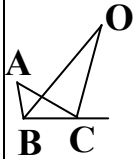
اگر در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه B و نیمساز خارجی زاویه C را رسم کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی

D قطع کنند آنگاه اندازه‌ی BDC برابر است با: $\frac{A}{2}$

مثال: در شکل زاویه‌ی $\hat{A} = 60^\circ$ و BO و CO نیمساز هستند. آنگاه:

(۱) $\hat{O} = 45^\circ$ (۲) $\hat{O} = 60^\circ$ (۳) $\hat{O} = 30^\circ$ (۴) هیچکدام (کنکور آزاد ریاضی ۷۶)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه B و نیمساز خارجی زاویه C همدیگر



به زاویه‌ی $\frac{A}{2}$ قطع می‌کنند. پس:

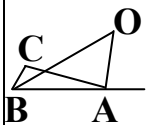
$$\hat{O} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

(۱۵) در مثلثی زوایای A و B و C به نسبت ۱ و ۴ و ۷ تقسیم شده‌اند. زاویه‌ی A که نیمساز داخلی زاویه‌ی A با نیمساز خارجی B می‌سازد، چند درجه است؟

(۱) ۳۵ درجه (۲) ۵۲/۵ درجه (۳) ۷۵ درجه (۴) ۱۵ درجه (کنکور آزاد ریاضی ۸۷ خارج از کشور)

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

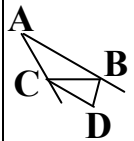
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = x + 4x + 7x = 180 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow \hat{A} = x = 15^\circ \text{ و } \hat{B} = 4x = 60^\circ \text{ و } \hat{C} = 7x = 105^\circ$$



در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه B و نیمساز خارجی زاویه A همدیگر به زاویه‌ی $\frac{C}{2}$ قطع می‌کنند.

$$\hat{O} = \frac{105}{2} = 52/5^\circ$$

پس:

نکته: زاویه بین دو نیمساز زاویه‌های خارجی مثلث: اگر در مثلث ABC نیمسازهای خارجی زوایای

B و C را رسم کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی D قطع کنند آنگاه اندازه‌ی BDC برابر است با: $90 - \frac{A}{2}$

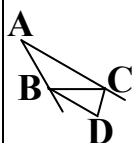
(۱۶) در مثلث ABC ، $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ و اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی B و C برابر ۷۵ درجه است، نوع مثلث کدام است؟

(۱) متساوی الساقین (۲) قائم الزاویه (۳) غیر مشخص (۴) قائم الزاویه و متساوی الساقین

جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: در مثلث ABC زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی زوایای B و C برابر است با: $90 - \frac{A}{2}$

$$90 - \frac{\hat{A}}{2} = 75 \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 150^\circ$$

پس:

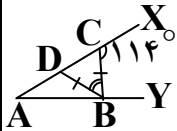


$$\frac{180 - \hat{B}}{2} + \frac{180 - \hat{C}}{2} + 75 = 180 \Rightarrow 360 - (\hat{B} + \hat{C}) = 210 \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 150$$

روش دوم:

$$\begin{cases} \hat{B} - \hat{C} = 90 \\ \hat{B} + \hat{C} = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 120 \\ \hat{C} = 30 \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = 30$$

مثال) در شکل مقابل $\widehat{BCX} = 114^\circ$. زاویه \widehat{CBD} چند درجه است؟



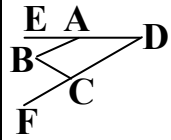
(۴) ۵۲ (کنکور سراسری تجربی ۸۴)

(۳) ۴۸

(۲) ۴۶

(۱) ۴۴

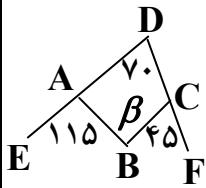
جواب: گزینه ۳ صحیح است. $\widehat{BCX} = 114^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BCD} = 66^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 180 - (66 + 66) = 48^\circ$



$$\widehat{EAB} + \widehat{BCF} = \widehat{B} + \widehat{D}$$

نکته: در شکل مقابل همواره داریم:

مثال) در شکل روبرو، اندازه‌ی زاویه β برابر است با:



(۴) ۶۵

(۳) ۹۰

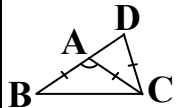
(۲) ۸۵

(۱) ۸۰

جواب: گزینه ۳ صحیح است. قطر BD را رسم می‌کنیم داریم:

$$\widehat{EAB} + \widehat{BCF} = \widehat{ADB} + \widehat{ABD} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD} = \widehat{B} + \widehat{D} \Rightarrow 115 + 45 = 70 + \beta \Rightarrow \beta = 90$$

مثال) در مثلث متساوی الساقین $(AB = AC)ABC$ ، ساق BA را از نقطه‌ی B به اندازه‌ی قاعده BC تا نقطه‌ی D ، امتداد می‌دهیم. اگر $CD = CA$ باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟



(۴) ۱۱۲ (کنکور سراسری ریاضی ۹۴ خارج از کشور)

(۳) ۱۰۸

(۲) ۱۰۵

(۱) ۱۰۲

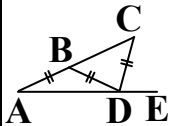
$$AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{A} = 180 - 2\widehat{B}$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است.

$$CD = CA \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{CAD} = 2\widehat{B}$$

$$BC = BD \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{D} = 2\widehat{B} \Rightarrow \triangle BCD: \widehat{B} + \widehat{BCD} + \widehat{D} = 180 \Rightarrow 5\widehat{B} = 180 \Rightarrow \widehat{B} = 36^\circ$$

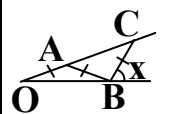
$$\Rightarrow \widehat{A} = 180 - 2\widehat{B} = 180 - 2 \times 36 = 108^\circ$$



$$\widehat{CDE} = 3\widehat{CAE}$$

نکته: در شکل مقابل همواره داریم:

مثال) در شکل زیر $\widehat{COB} = 20^\circ$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی X کدام است؟



(۴) ۶۰ درجه

(۳) ۵۰ درجه

(۲) ۴۰ درجه

(۱) ۳۰ درجه

جواب: گزینه ۴ صحیح است. (زاویه‌ی خارجی مثلث AOB) $\widehat{AOB} = 20^\circ$ و $OA = AB \Rightarrow \widehat{ABO} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 40^\circ$

$$AB = BC \Rightarrow \widehat{OCB} = 40^\circ \Rightarrow x = 40 + 20 = 60$$
 (زاویه‌ی خارجی مثلث COB)

(۱۷) در شکل مقابل $\widehat{BCX} = 117^\circ$. زاویه \widehat{CBY} چند درجه است؟

(۱) ۹۳ (۲) ۹۴/۵ (۳) ۹۵/۵ (۴) ۹۶ (کنکور سراسری تجربی ۸۴ خارج از کشور)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. $\widehat{BCX} = 117^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BCD} = 63^\circ \Rightarrow 2\widehat{A} = 2\widehat{ABD} = 63^\circ$.
 روش اول: $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{ABD} = 31/5^\circ \Rightarrow \widehat{CBY} = \widehat{A} + \widehat{BCD} = 31/5 + 63 = 94/5^\circ$

روش دوم: $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{ABD} = 31/5^\circ \Rightarrow \widehat{CBY} = 3\widehat{A} = 94/5^\circ$

نکته: زاویه بین دو قاعده‌ی مثلث‌های متساوی‌الساقین تشکیل شده در دو رأس

مجاور مثلث: اگر در مثلث ABC شکل مقابل $BE = BD$ و $CF = CD$ و $\widehat{A} = \alpha$ باشد آنگاه $\widehat{EDF} = 90 - \frac{\alpha}{2}$ است.

نکته: زاویه بین دو قاعده‌ی مثلث‌های متساوی‌الساقین تشکیل شده در امتداد دو

ضلع مجاور مثلث: اگر در مثلث ABC شکل مقابل $BE = BD$ و $CF = CD$ و $\widehat{A} = \alpha$ باشد آنگاه $\widehat{EDF} = 90 + \frac{\alpha}{2}$ است.

مثال: در شکل مقابل، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین اند و $\widehat{M} = 43^\circ$ است. زاویه \widehat{BAC} چند درجه است؟

(۱) ۹۳ (۲) ۹۴ (۳) ۹۶ (۴) ۹۷ (کنکور سراسری تجربی ۹۲ خارج از کشور)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. روش اول: با توجه به شکل مقابل داریم: $\widehat{M}_1 + 43 + \widehat{M}_2 = 180 \Rightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 137$

$BM = BA \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{A}_1 \Rightarrow \widehat{B} + 2\widehat{M}_2 = 180 \Rightarrow \widehat{B} = 180 - 2\widehat{M}_2$
 $CM = CA \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N} \Rightarrow \widehat{C} + 2\widehat{M}_1 = 180 \Rightarrow \widehat{C} = 180 - 2\widehat{M}_1$

$\widehat{BAC} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180 - (180 - 2\widehat{M}_2 + 180 - 2\widehat{M}_1) = -180 + 2(\widehat{M}_2 + \widehat{M}_1) = -180 + 274 = 94^\circ$

روش دوم: $\widehat{AMN} = 90 - \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow 43 = 90 - \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 180 - 86 = 94^\circ$

روش سوم: آزمون عدد: $\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{M}_2 = \frac{180 - 60}{2} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{M}_1 = 180 - (60 + 43) = 77^\circ = \widehat{N}$

$\widehat{C} = 180 - 2 \times 77 = 26^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 180 - (60 + 26) = 94^\circ$

۱۸) در شکل مقابل $\hat{A} = 58^\circ$ و $BM = BD$ و $CN = CD$ ، زاویه $\hat{M}DN$ چند درجه است؟



(کنکور سراسری ریاضی ۹۱)

۶۲ (۴)

۶۱ (۳)

۵۹ (۲)

۵۸ (۱)

$$BM = BD \Rightarrow \hat{BMD} = \hat{BDM}$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است. روش اول:

$$CN = CD \Rightarrow \hat{CND} = \hat{CDN}$$

$$\Delta ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180 - 58 = 122$$

از طرفی زوایای دو مثلث ΔBMD و ΔCND روی هم 360 درجه است داریم:

$$\hat{BMD} + \hat{BDM} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{CND} + \hat{CDN} = 360 \Rightarrow$$

$$2\hat{BDM} + 122 + 2\hat{CDN} = 360 \Rightarrow \hat{BDM} + \hat{CDN} = 119 \Rightarrow \hat{MDN} = 180 - 119 = 61$$

$$\hat{MDN} = 90 - \frac{\alpha}{2} = 90 - \frac{58}{2} = 90 - 29 = 61$$

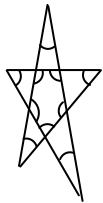
روش دوم:

$$\hat{B} = \hat{C} = 61^\circ \Rightarrow \hat{BDM} = \hat{CDN} = \frac{180 - 61}{2} = 59.5^\circ \Rightarrow \hat{MDN} = 61^\circ$$

روش سوم: آزمون عدد

نکته: در شکل مقابل مجموع زوایای A, B, C, D, E برابر است با: $180^\circ \times (4 - \text{تعداد پره ها})$

مثال: مجموع زاویه های مشخص شده در شکل زیر، چند درجه است؟



(هنر ۹۵)

۹۰۰ (۴)

۸۴۰ (۳)

۷۲۰ (۲)

۶۸۰ (۱)

$$(5 - 2) \times 180 = 540$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است. مجموع زاویه های داخلی پنج ضلعی برابر است با:

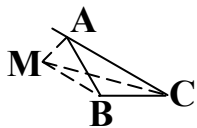
$$(5 - 4) \times 180 = 180$$

و مجموع پنج زاویه کناری برابر است با:

$$540 + 180 = 720$$

در نتیجه مجموع کل زاویه ها برابر است با:

مثال: در شکل روبه رو، نقطه M روی نیمساز خارجی زاویه A است. نسبت $\frac{MB + MC}{AB + AC}$ چگونه است؟



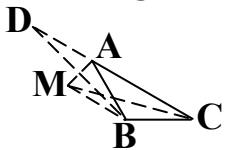
(۴) غیر مشخص

(۳) برابر با ۱

(۲) کمتر از ۱

(۱) بزرگتر از ۱

(کنکور سراسری ریاضی ۹۴ خارج از کشور)

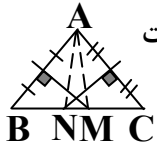
جواب: گزینه ۱ صحیح است. ضلع AC را از طرف A تا نقطه D امتداد می دهیم به طوری که $AD = AB$ بنابراین نیمساز خارجی زاویه A از مثلث ABC ، عمودمنصف BD در مثلث متساوی الساقین ABD است.نقطه M بر روی عمودمنصف BD واقع است، پس: $MB = MD$

$$MB + MC = MD + MC > DC = AD + AC = AB + AC \Rightarrow \frac{MB + MC}{AB + AC} > 1$$

در نتیجه داریم:

۱۹) در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ ، عمودمنصف های دو ساق مثلث، قاعده ی BC را در M و N قطع می کند. کوچکترین زاویه ی مثلث AMN چند درجه است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۲)



جواب: گزینه ۲ صحیح است. می دانیم هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است

$$NC = NA \Rightarrow \hat{CAN} = \hat{C} = 50^\circ \text{ و } MB = MA \Rightarrow \hat{BAM} = \hat{B} = 50^\circ \quad \text{پس:}$$

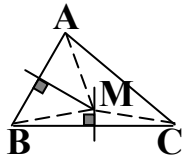
$$\hat{MAN} = \hat{BAM} + \hat{CAN} - \hat{A} = 50 + 50 - 80 = 20^\circ$$

توضیح: عمود منصف های ضلع های هر مثلث همسرند.

مثال: کدام یک از نقاط زیر از سه رأس مثلث به یک فاصله است؟

- (۱) محل تلاقی ارتفاع ها (۲) محل تلاقی میانه ها (۳) محل تلاقی عمودمنصف ها (۴) محل تلاقی نیمسازهای داخلی

جواب: گزینه ۳ صحیح است. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. در نتیجه محل تلاقی



عمودمنصف ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

(۲۰) چند نقطه در صفحه مثلث وجود دارد که از رأس های آن به یک فاصله باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

جواب: گزینه ۱ درست است. مرکز دایره محیطی مثلث جواب مسئله است.

مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC ، $AB = AC$ و $BC = 8$ فاصله ی نقطه ی همرسی عمودمنصف های اضلاع از قاعده برابر

۳ است. طول ساق مثلث به شرط آن که از قاعده بزرگتر باشد، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{5}$

جواب: گزینه ۴ صحیح است. فرض کنیم O نقطه ی همرسی عمودمنصف های سه ضلع مثلث باشد پس این نقطه

از سه رأس مثلث به یک فاصله است در نتیجه $OC = OA$ از طرفی در مثلث متساوی الساقین ABC عمودمنصف ضلع

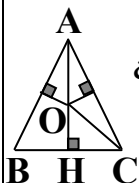
BC همان ارتفاع AH است و $OH = 3$. لذا در مثلث قائم الزاویه ی OHC می توان نوشت:

$$OC^2 = OH^2 + HC^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow OC = 5 \Rightarrow AH = OA + OH = 5 + 3 = 8$$

$$\Rightarrow \Delta ABH : AB^2 = BH^2 + AH^2 = 16 + 64 = 80 \Rightarrow AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

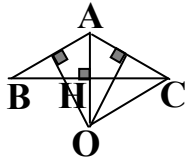
لازم به ذکر است که اگر زاویه A منفرجه باشد نقطه ی همرسی عمودمنصف ها خارج مثلث قرار می گیرد و طول ساق مثلث از قاعده

کوچکتر خواهد بود.



مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC ، $AB = AC$ و $BC = 8$ فاصله نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع از قاعده برابر ۳ است. طول ساق مثلث به شرط آن که از قاعده کوچکتر باشد، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$



جواب: گزینه ۳ صحیح است. فرض کنیم O نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث باشد پس این نقطه از سه رأس مثلث به یک فاصله است در نتیجه $OC = OA$ از طرفی در مثلث متساوی الساقین ABC عمودمنصف ضلع BC همان امتداد ارتفاع AH است و $OH = 3$. لذا در مثلث قائم‌الزاویه OHC می‌توان نوشت:

$$OC^2 = OH^2 + HC^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow OC = 5 \Rightarrow OA = OC = 5 \Rightarrow AH = OA - OH = 5 - 3 = 2$$

$$\Rightarrow \Delta ABH : AB^2 = BH^2 + AH^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

لازم به ذکر است که اگر زاویه A حاده باشد نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌ها درون مثلث قرار می‌گیرد و طول ساق مثلث از قاعده بزرگتر خواهد بود.

قضیه: سه ارتفاع هر مثلث هم‌رسند.

قضیه: در هر مثلث سه نیمساز زاویه‌های داخلی هم‌رسند.

نکته: در هر مثلث نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه‌ی رأس سوم هم‌رسند.

(۲) در صفحه‌ی یک مثلث چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آنها به یک فاصله باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (کنکور سراسری ریاضی ۶۸ و سراسری تجربی ۸۰)

جواب: گزینه ۴ درست است. در صفحه‌ی یک مثلث نقطه‌ای که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آنها به یک فاصله باشد محل هم‌رسی نیمسازهای داخلی آن است. این نقاط مرکز دایره محاطی اند. پس سه مرکز دایره‌های محاطی برون‌ی و یک مرکز دایره محاطی درونی جواب مسئله اند.

قضیه: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه‌ی مقابل به ضلع کوچکتر.

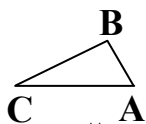
مثال: در مثلث ABC اندازه‌ی اضلاع $AB = 3$ و $BC = 6$ و $AC = 7$ است، کدام زاویه‌ی مثلث منفرجه است؟

- (۱) A (۲) B (۳) C (۴) هیچکدام (کنکور آزاد تجربی ۶۹)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. روش اول: می‌دانیم در هر مثلث، زاویه‌ی رو به رو به ضلع بزرگتر از زاویه‌ی رو به رو به ضلع کوچکتر،

$$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \text{ و } AC > BC \Rightarrow \hat{B} > \hat{A} \Rightarrow \hat{B} > \hat{A} \text{ و } \hat{C}$$

بزرگتر است. پس:



روش دوم: با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$AC^2 = 49 \text{ و } AB^2 + BC^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow AC^2 > AB^2 + BC^2 \Rightarrow \hat{B} > 90^\circ$$

نکته: اگر در مثلث ABC : AM میانه و $AB < AC$ باشد. آنگاه: $\hat{B}AM > \hat{M}AC$

مثال: در مثلث ABC : AM میانه و $AB < AC$ می باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

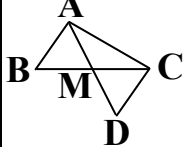
$$\hat{B}AM < \hat{M}AC \quad (۲)$$

$$\hat{B}AM > \hat{M}AC \quad (۱)$$

$$\hat{B}AM = \hat{M}AC \quad (۴)$$

$$\hat{B}AM = \hat{M}AC \quad (۳)$$

جواب: گزینه ۱ صحیح است. میانه AM را از طرف نقطه M به اندازه خودش ادامه داده و نقطه حاصل را D می نامیم. این نقطه



$$\Delta ABM \cong \Delta CDM \text{ (ض.ض.ض)} \Rightarrow \hat{B}AM = \hat{C}DM \quad (۱)$$

را به راس C وصل می کنیم.

$$CD = AB \xrightarrow{\Delta ACD} CD < AC \Rightarrow \hat{C}DM > \hat{M}AC \quad (۲) \xrightarrow{(۱), (۲)} \hat{B}AM > \hat{M}AC$$

قضیه: در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ تر است. (نامساوی مثلثی)

قضیه: در هر مثلث قدرمطلق تفاضل طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم کوچکتر است.

قضیه نامساوی مثلثی (یا قضیه چهارم): در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر

و از قدرمطلق تفاضل طول های این دو ضلع از طول ضلع سوم کوچکتر است. $\Delta ABC : AB + BC > AC > |AB - BC|$

قضیه وجودی مثلث: سه عدد حقیقی در صورتی اندازه‌ی اضلاع یک مثلث اند که بزرگترین عدد از مجموع دو عدد دیگر

کوچکتر باشد و یا کوچکترین عدد از قدرمطلق تفاضل دو عدد دیگر بزرگتر باشد.

مثال: اندازه‌ی اضلاع مثلثی اعداد صحیح اند یک ضلع ۹ واحد و نسبت دو ضلع دیگر آن $\frac{1}{3}$ می باشد، اندازه‌ی بزرگترین ضلع ممکن

کدام است؟

(هنر ۸۵)

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۴ (۱)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ تر است. (نامساوی مثلثی)

$$x < 2x + 9 \Rightarrow -9 < x \quad (۱)$$

$$2x < x + 9 \Rightarrow x < 9 \quad (۲)$$

$$9 < x + 2x \Rightarrow 3 < x \quad (۳)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \text{ و } (۳) \Rightarrow 3 < x < 9 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 8 \Rightarrow 2x = 16$$

مثال: سه پاره خط به طول های $6x$ ، $x+7$ و $4x-4$ اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟

(کنکور سراسری ریاضی ۸۲) $\frac{11}{9} < x < 4$ (۴) $2 < x < 3$ (۳) $\frac{5}{3} < x < 3$ (۲) $\frac{11}{9} < x < 3$ (۱)

$$\begin{cases} 6x > 0 \Rightarrow x > 0 \\ x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7 \Rightarrow 1 < x \\ 4x - 4 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

جواب: گزینه ۱ درست است.

$$\text{در نتیجه باید } \frac{11}{9} < x < 3 \text{ باشد.}$$

$$\begin{cases} 6x < x + 7 + 4x - 4 \Rightarrow x < 3 \\ x + 7 < 6x + 4x - 4 \Rightarrow \frac{11}{9} < x \Rightarrow \frac{11}{9} < x < 3 \\ 4x - 4 < 6x + x + 7 \Rightarrow \frac{-11}{3} < x \end{cases}$$

از طرفی $\frac{11}{9} < x < 3$

مثال: محیط یک مثلث متساوی الساقین برابر ۹ سانتی متر است. اندازهی ساق آن مثلث در کدام محدوده قرار خواهد داشت؟

(۱) بین ۳ و ۶ (۲) کوچکتر از ۶ (۳) بین $2/25$ و $4/5$ (۴) کوچکتر از $4/5$

جواب: گزینه ۳ صحیح است. اگر اندازهی ساق مثلث را a و اندازهی قاعدهی آن را b بنامیم، بنا به قضیهی نامساوی مثلثی داریم:

$$a - a < b < a + a \Rightarrow 0 < b < 2a \Rightarrow 2a < b + 2a < 4a \Rightarrow 2a < 9 < 4a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a < 9 \Rightarrow a < 4/5 \\ 9 < 4a \Rightarrow 2/25 < a \end{cases} \Rightarrow 2/25 < a < 4/5$$

نکته: چنانچه AA' ، BB' و CC' سه ارتفاع مثلث ABC باشند داریم: $\frac{1}{AA'} < \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'}$ و برعکس

نتیجه: برای آنکه بتوانیم مثلثی با معلوم بودن سه ارتفاع آن رسم کنیم باید معکوس هر ارتفاع از قدرمطلق تفاضل معکوس دو

$$\left| \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \right| < \frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a}$$

ارتفاع دیگر بزرگتر و از مجموع معکوس دو ارتفاع دیگر کوچکتر باشد. به عبارت دیگر

مثال: تعداد مثلث های ممکن با ارتفاع های ۵ و ۴ و ۲ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار (هنر ۸۶)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. برای آنکه بتوانیم مثلثی با معلوم بودن سه ارتفاع آن رسم کنیم باید داشته باشیم:

$$\left| \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \right| < \frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a}$$

$$\frac{1}{h_b} \neq \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} \text{ ولی } \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ و } \frac{1}{h_b} = \frac{1}{2}$$

۲۲) حدود m برای این که بتوانیم مثلثی رسم کنیم که ارتفاع های آن $h_a = \frac{1}{4}$ و $h_b = \frac{1}{m}$ و $h_c = \frac{1}{3}$ باشند، کدام است؟

$$(1) \frac{6}{5} < m < 6 \quad (2) \frac{1}{6} < m < \frac{5}{6} \quad (3) \frac{1}{5} < m < 1 \quad (4) 1 < m < 5$$

جواب: گزینه ۴ صحیح است. برای آنکه بتوانیم مثلثی با معلوم بودن سه ارتفاع آن رسم کنیم باید معکوس هر ارتفاع از قدرمطلق تفاضل دو ارتفاع دیگر بزرگتر و از معکوس مجموع دو ارتفاع دیگر کوچکتر باشد.

$$\left| \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \right| < \frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} \Rightarrow |3 - 4| < m < 3 + 4 \Rightarrow 1 < m < 5$$

نکته: اگر M یک نقطه‌ی اختیاری داخل مثلث ABC باشد. آنگاه:

$$\text{الف: } BC < MB + MC < AB + AC$$

ب: محیط BMC از محیط ABC کوچکتر است.

مثالاً) اگر M یک نقطه‌ی اختیاری داخل مثلث ABC باشد. کدام رابطه درست است؟

$$(1) MA + MB < CA + CB \quad (2) MA + MB \leq MC$$

(کاردانی به کارشناسی سراسری ۸۲)

$$(3) MA + MB \geq MC \quad (4) MA + MB > CA + CB$$



$$BC < MA + MB < CA + CB$$

جواب: گزینه ۱ صحیح است. می دانیم:

قضیه وجودی مثلث: سه عدد حقیقی مثبت a ، b و c داده شده اند، اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر

کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلع های آن a ، b و c هستند.

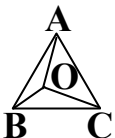
نکته: سه عدد حقیقی در صورتی اندازه‌ی اضلاع یک مثلث اند که بزرگترین عدد از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد و یا

کوچکترین عدد از قدرمطلق تفاضل دو عدد دیگر بزرگتر باشد.

نکته: در هر مثلث مجموع سه ارتفاع از نصف محیط مثلث بزرگتر و از محیط مثلث کوچکتر است.

نکته: در هر چند ضلعی، هر ضلع از مجموع ضلع های دیگر کوچکتر است.

نکته: مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث از سه راس آن بزرگتر از نصف مجموع سه ضلع مثلث و کوچکتر از مجموع سه



$$\frac{AB + BC + AC}{2} < OA + OB + OC < AB + BC + AC$$

۲

ضلع مثلث است. یعنی

۲۳) مثلثی به طول اضلاع ۳، $3 - \sqrt{2}$ و $2 + \sqrt{2}$ واحد، نقطه M داخل مثلث تغییر مکان می دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل نقطه M از سه راس مثلث، مورد قبول است؟

(۱) $5 - \sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۸ (کنکور سراسری ریاضی ۸۸ خارج از کشور)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. محیط مثلث < مجموع فواصل نقطه M از سه راس مثلث < نصف محیط مثلث

$$\Rightarrow \frac{3 + 3 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}}{2} < 3 + 3 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 4 < 8 < \text{مجموع فواصل نقطه } M \text{ از سه راس مثلث} < 4$$

نکته: الف: در هر متوازی الاضلاع مجموع دو قطر از نصف محیط آن بزرگتر و از محیط آن کوچکتر است.

ب: در هر چهارضلعی محدب مجموع دو قطر از نصف محیط آن بزرگتر و از محیط آن کوچکتر است.

پ: در هر چهارضلعی محدب مجموع دو قطر از مجموع دو ضلع روبه روی آن بزرگتر است.

مثال: محیط چهارضلعی محدب $ABCD$ برابر ۷۲ واحد است در این صورت.....

$$(1) \quad 24 < AC + BD < 48 \quad (2) \quad 36 < AC + BD < 72$$

$$(3) \quad 72 < AC + BD < 144 \quad (4) \quad 24 < AC + BD < 96$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است. در هر چهارضلعی محدب مجموع دو قطر از نصف محیط آن بزرگتر و از محیط آن کوچکتر است.

مثال: مثلثی با طول سه ضلع b و c و $2m_a$ (طول میانه‌ی مثلث ABC است) رسم کرده ایم. طول میانه‌ی وارد بر ضلع

$2m_a$ کدام است؟

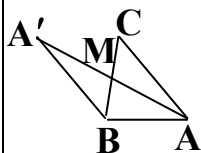
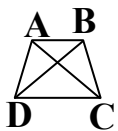
$$(1) \quad a \quad (2) \quad 2a \quad (3) \quad \frac{a}{2} \quad (4) \quad \frac{b+c}{2} \quad (\text{کنکور آزاد ریاضی ۷۷})$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است. میانه AM را از طرف M امتداد داده، نقطه‌ی A' را طوری اختیار می کنیم که $AM = A'M$

$$\begin{cases} AM = A'M \\ BM = CM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض-ز-ض})} \triangle AMC = \triangle A'MB \Rightarrow AC = BA'$$

در مثلث ABA' ، سه ضلع برابر با b و c و $2m_a$ می باشند و میانه‌ی وارد بر ضلع $2m_a$ ، پاره خط BM است

$$\text{و می دانیم } BM = MC = \frac{a}{2}$$




مثال) اگر a و b و m_c دو ضلع و میانه وارد بر ضلع سوم باشند، کدام گزینه در مثلث درست نیست؟

(۱) $a = 7$ و $b = 6$ و $m_c = 5$ (۲) $a = 5$ و $b = 6$ و $m_c = 7$

(۳) $a = 5$ و $b = 6$ و $m_c = 5$ (۴) $a = 6$ و $b = 6$ و $m_c = 5$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۸)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. در مثلث ABC میانه CM را از طرف M به اندازه‌ی خودش امتداد داده و نقطه‌ی حاصل را C'

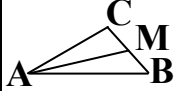


$$\begin{cases} CM = C'M \\ BM = AM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض-ز-ض)}} \triangle AMC = \triangle C'MB \Rightarrow AC = BC'$$

می‌نامیم.

در مثلث CBC' ، سه ضلع برابر با a و b و m_c می‌باشند بنا به قضیه حمار در این مثلث داریم: $a + b > 2m_c$

نکته: در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر و از نصف قدرمطلق تفاضل دو ضلع مجاور آن بزرگتر




$$\frac{|AB - AC|}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$$

است. یعنی اگر AM میانه مثلث ABC باشد آنگاه

مثال) در مثلث $a = 6$ و $b = 10$ و $m_c = 4$ آنگاه مثلث:

(۱) حاده الزاویه است. (۲) قائم الزاویه است. (۳) منفرجه الزاویه است. (۴) وجود ندارد. (کنکور آزاد ریاضی ۸۴)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. میانه $CM = m_c$ را از طرف M امتداد داده نقطه‌ی D را طوری اختیار می‌کنیم که $CM = MD$ (۱)



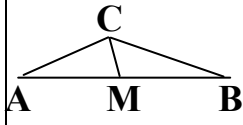
$$\begin{cases} CM = MD \\ AM = MB \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض-ز-ض)}} \triangle AMC = \triangle DMB \Rightarrow AC = BD(2)$$

$\triangle ABCD : BC = 6$ و $CD = 8$ و $BD = 10 \Rightarrow \hat{DCB} = 90^\circ \Rightarrow \hat{ACB} > 90^\circ$

(۲۴) در مثلثی طول اضلاع $BC = 9$ و $AC = 7$ طول میانه وارد بر ضلع سوم کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴) ۱۰ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۹۱)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر و از نصف



$$\frac{|9 - 7|}{2} < CM < \frac{9 + 7}{2} \Rightarrow 1 < CM < 8$$

قدرمطلق تفاضل دو ضلع مجاور آن بزرگتر است.

نکته: در هر مثلث مجموع سه میانه از محیط مثلث کوچکتر است.