

مهندسه ۱

پایه می دهم « رشته می ریاضی و فیزیک »

فصل (۲) :

قضیه ی تالس ، تشابه و کاربرد

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

## فصل دوم

### درس اول : نسبت و تناسب در هندسه

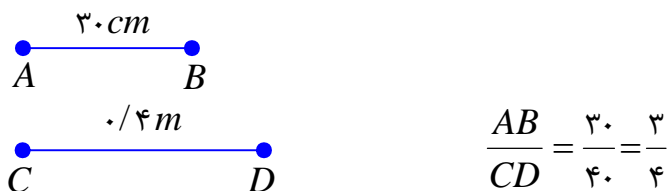
در این درس ، مفهوم نسبت و تناسب را معرفی می کنیم و سپس مسائلی از هندسه را که به کمک این مفهوم می توان حل کرد را نیز حل می کنیم.

#### مفهوم نسبت و تناسب

**نسبت** دو کمیت کسری است که صورت و مخرج آن اندازه‌های آن دو کمیت برحسب یک واحد باشند.

مثلاً: کسر  $\frac{a}{b}$  را نسبت  $a$  بر  $b$  گویند هرگاه  $a$  و  $b$  برحسب یک واحد باشند.

**مثال:** نسبت اندازه‌ی پاره خط  $AB$  بر اندازه‌ی پاره خط  $CD$  را با توجه به شکل مقابل بنویسید.



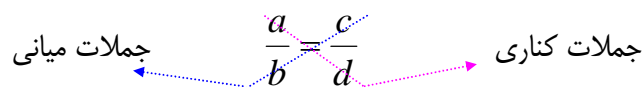
**نتیجه:** نسبت دو کمیت یک عدد حقیقی است و به واحد اندازه‌گیری آنها بستگی ندارد.

بیان تساوی دو نسبت را **تناسب** گویند.

مثلاً: تساوی دو نسبت  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  ،  $b, d \neq 0$  را یک تناسب گویند.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

در یک تناسب مانند تناسب فوق جملات  $a$  و  $d$  را طرفین (جملات کناری) و  $b$  و  $c$  را وسطین (جملات میانی) می‌نامند.



#### خاصیت اصلی تناسب

در هر تناسب حاصل ضرب دو جمله‌ی کناری با حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی آن برابر است.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$$

**اثبات:** چون  $b, d \neq 0$  پس  $bd \neq 0$ . حال کافی است دو طرف تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  را در  $bd$  ضرب کنیم.

خواهیم داشت:

$$bd \left( \frac{a}{b} \right) = bd \left( \frac{c}{d} \right) \rightarrow ad = bc$$

### خواص دیگر تناسب

**۱:** در یک تناسب می‌توان جای دو جمله‌ی میانی و یا دو جمله‌ی کناری را عوض کرد و تناسب جدیدی به دست آورد.  $(a, b, c, d \neq 0)$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجایی جملات میانی}} \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجایی جملات کناری}} \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجایی جملات میانی}} \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

**نتیجه:** در یک تناسب می‌توان هر دو نسبت را معکوس کرد و تناسب جدیدی به دست آورد.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (a, b, c, d \neq 0)$$

**۲:** در یک تناسب از ترکیب نسبت در صورت (یا در مخرج) تناسبی جدید به وجود می‌آید.  $(b, d \neq 0)$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

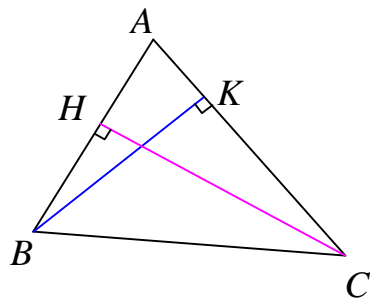
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

**۳:** در یک تناسب، نسبت مجموع صورتها به مجموع مخرجها برابر هر یک از نسبت‌های تناسب است.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \rightarrow \frac{a+c}{b+d} = k \quad (b, d \neq 0)$$

**توجه:** خاصیت ۳ برای چند نسبت مساوی نیز قابل تعمیم است.

**تمرین ۱:** ثابت کنید که در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دوضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آنها برابر است.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BK$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} AC \times BK \rightarrow AB \times CH = AC \times BK \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BK}{CH}$$

**تمرین ۲:** ثابت کنید که اگر اندازه‌های ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه‌ی قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها عمود اند.

حل:

	قاعده	ارتفاع	مساحت
مثلث اوّل	$a$	$h$	$S_1$
مثلث دوّم	$b$	$k$	$S_2$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bk} = \frac{ah}{bk} \xrightarrow{h=k} \frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

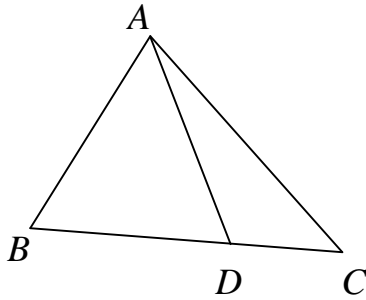
**تمرین ۳:** ثابت کنید که اگر اندازه‌های قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت ارتفاع‌هایی است که بر این قاعده‌ها عمود شده‌اند.

حل:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bk} = \frac{ah}{bk} \xrightarrow{a=b} \frac{S_1}{S_2} = \frac{h}{k}$$

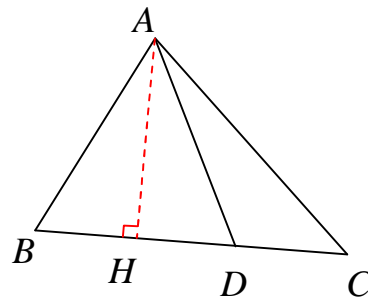
**تمرین ۴:** با توجه به شکل مقابل ثابت کنید که نسبت مساحت های دو مثلث  $ABD$  و  $ADC$  برابر با

نسبت قاعده های آنها است.



**حل:** ابتدا ارتفاع وارد بر دو قاعده‌ی دو مثلث را رسم می کنیم. واضح است این دو مثلث ارتفاع مشترک دارند.

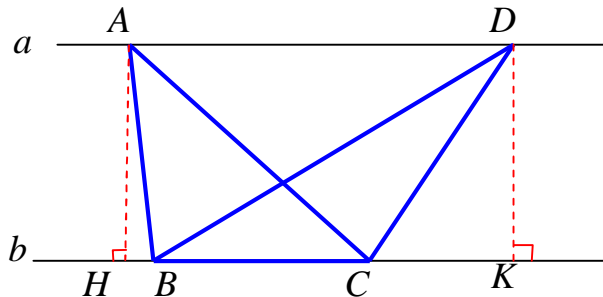
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AH}{\frac{1}{2} DC \times AH} = \frac{BD}{DC}$$



**تمرین ۵:** ثابت کنید که اگر دو مثلث قاعده‌ی مشترکی داشته باشند و رأس های روبروی این قاعده‌ی آنها،

روی یک خط موازی با امتداد قاعده باشند، این مثلث ها هم مساحت اند. (قضیه‌ی کواگیری)

**حل:**



$$a \parallel b \rightarrow AH = DK$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} DK \times BC = S_{DBC}$$

\*\*\*

**تمرین ۶:** اگر  $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$  مقدار  $\frac{a+b}{a-b}$  را به دست آورید.

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{3+4}{4} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{7}{4} \\ \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{3-4}{4} \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{-1}{4} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{-1}{4}} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = -7$$

**تمرین برای حل :**

**۷:** در هر مورد مقدار مجهول را بیابید.

الف)  $\frac{x}{3} = \frac{9}{10}$       ب)  $\frac{y}{y+2} = \frac{3}{4}$       ج)  $\frac{z+1}{z} = \frac{4}{z}$       د)  $\frac{2a+1}{18} = \frac{35}{b} = \frac{5}{2}$

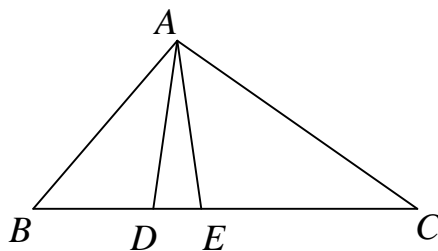
**۸:** محیط مستطیلی ۲۱۰ سانتی‌متر و نسبت طول به عرض آن  $\frac{4}{3}$  است. مساحت این مستطیل را به دست

آورید.

**۹:** متناظر با تساوی مقابل یک تناسب بنویسید.  $5x + y = 2x + 7y$

**۱۰:** خواص ۲ و ۳ را ثابت کنید.

**۱۱:** اگر  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ ، حاصل  $x + y + z$  را به دست آورید.



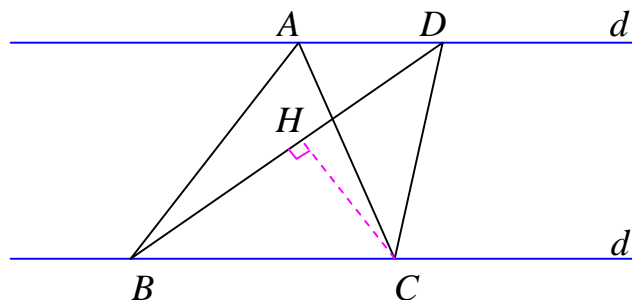
**۱۲:** در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت

مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت

های  $\frac{BC}{DE}$  و  $\frac{BD}{BD}$  را به دست آورید.

**۱۳:** در شکل مقابل  $d \parallel d'$  و مساحت مثلث ABC برابر ۸ سانتی متر مربع است. اگر اندازه‌ی ضلع BD

برابر ۶ سانتی متر باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی C از BD را به دست آورید.



## واسطه‌ی هندسی (میانگین هندسی)

عدد  $x$  را میانگین هندسی بین دو عدد  $a$  و  $b$  گویند، هرگاه  $x^2 = ab$

**مثال:** واسطه‌ی هندسی بین ۴ و ۹ را می‌توان به شکل زیر محاسبه نمود.

$$x^2 = (4)(9) \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$$

### تمرین برای حل:

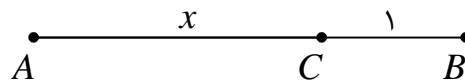
**۱۴:** واسطه‌ی هندسی بین دو عدد  $16\sqrt{2}$  و  $2\sqrt{2}$  را تعیین کنید.

**۱۵:** طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه‌ی هندسی بین دو پاره خط به طول های ۸ و ۱۰ سانتی متر است.

**۱۶:** اگر  $\frac{a-c}{b-a} = \frac{c}{a}$  ثابت کنید که  $a$  واسطه‌ی هندسی بین دو عدد  $c$  و  $b$  است.

**۱۷:** اگر داشته باشیم  $\frac{3}{4} = \frac{x-1}{20} = \frac{21}{y+3}$  واسطه‌ی هندسی بین  $y$  و  $x$  را بیابید.

**۱۸:** در شکل زیر  $AC$  واسطه‌ی هندسی بین  $AB$  و  $BC$  است. مقدار  $x$  را به دست آورید.



\*\*\*

## تهیه کننده: جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

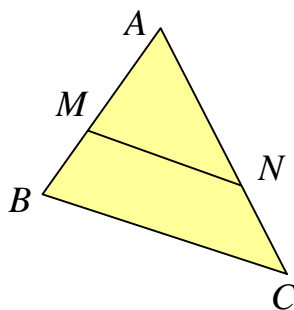
## فصل دوم

### درس دوم : قضیه‌ی تالس

یکی از قضیه‌های مهم در ریاضی و هندسه، که کاربرد‌های زیادی نیز دارد، قضیه‌ی تالس می‌باشد. در این درس قضیه‌ی تالس را معرفی و اثبات می‌کنیم.

\*\*\*

**قضیه (قضیه‌ی تالس) :** اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند روی آنها پاره‌های متناسب بوجود می‌آورد.

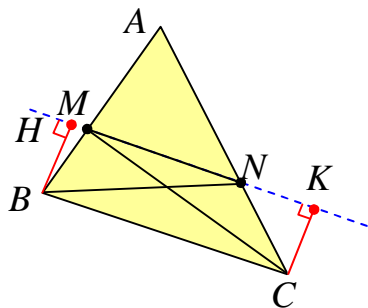


فرض :  $MN \parallel BC$

$$\text{حکم : } \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

اثبات :

مرحله‌ی اول :

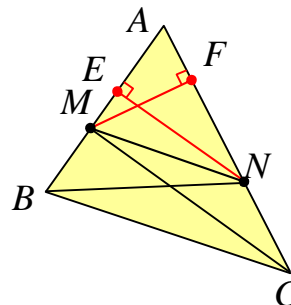


نقطه‌ی  $N$  را به  $B$  و همچنین نقطه‌ی  $M$  را به  $C$  وصل می‌کنیم. دو مثلث  $MNB$  و  $MNC$  حاصل می‌شود که ارتفاع نظیر ضلع  $MN$  در هر دو یکسان است. زیرا چهارضلعی  $BHCK$  مستطیل می‌باشد و در مستطیل اضلاع روبرو مساویند ( $BH = CK$ ). لذا طبق آنچه گفته شد داریم :

$$S_{\Delta MNB} = \frac{1}{2} MN \cdot BH = \frac{1}{2} MN \cdot CK = S_{\Delta MNC}$$

مرحله‌ی دوم : از نقطه‌ی  $N$  بر ضلع  $AB$  پاره خط  $NE$  را عمود می‌کنیم. پس

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNB}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot NE}{\frac{1}{2} MB \cdot NE} = \frac{AM}{MB}$$





مرحله ی سوم : از نقطه ی  $M$  بر ضلع  $AC$  پاره خط  $MF$  را عمود می کنیم پس

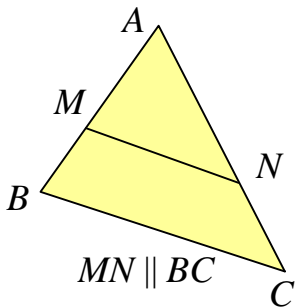
$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNC}} = \frac{\frac{1}{2} AN.MF}{\frac{1}{2} NC.MF} = \frac{AN}{NC}$$

مرحله ی چهارم : طبق دو مرحله دوم و سوم داریم

$$\left. \begin{array}{l} \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNB}} = \frac{AM}{MB} \\ \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNC}} = \frac{AN}{NC} \end{array} \right\} \xrightarrow{S_{\Delta MNB} = S_{\Delta MNC}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

\*\*\*

**نتیجه :** رابطه ی تالس را می توان به صورت زیر نوشت.



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

**اثبات :** کافی است نسبت را در مخرج ترکیب کنیم.

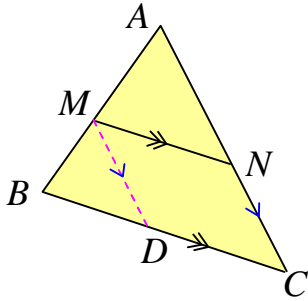
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \rightarrow \frac{AM}{AM + MB} = \frac{AN}{AN + NC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

**توجه :** اگر رابطه ی تالس را به صورت  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$  بنویسیم، می گوییم، رابطه به صورت جزء به جزء

نوشته شده است. در حالی که در حالت  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  رابطه را جزء به کل گویند.

\*\*\*

**قضیه (قضیه‌ی کلی تالس):** اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلث دیگری بوجود می‌آورد که اضلاع آن با اضلاع متناظر از مثلث اصلی متناسبند.



فرض:  $MN \parallel BC$

حکم:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

**اثبات:** تناسب  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  (۱) طبق قضیه‌ی تالس بدیهی است. از طرفی اگر از نقطه‌ی  $M$  پاره‌خط

$MD$  را موازی  $AC$  رسم کنیم. با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم:

$$MD \parallel AC \rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{BD}{BC} \rightarrow \frac{-BM}{AB} = \frac{-BD}{BC}$$

و با ترکیب نسبت در صورت می‌توان نوشت:

$$\frac{AB - BM}{AB} = \frac{BC - BD}{BC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

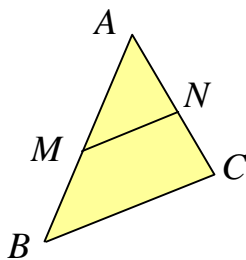
ولی چهارضلعی  $MNCD$  متوازی الاضلاع است پس  $MN = DC$  و لذا

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad (۲)$$

حال طبق نتایج ۱ و ۲ به دست آمده می‌توان نوشت:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

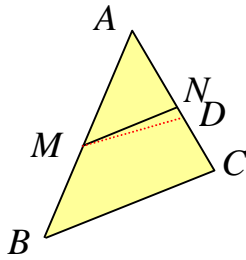
\*\*\*



**قضیه (عکس قضیه‌ی تالس):** اگر خطی دو ضلع مثلثی (یا امتداد آنها) را

قطع کند و روی آنها پاره‌خط‌های متناسب پدید آورد، آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.

حکم :  $MN \parallel BC$  فرض :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$



**اثبات :** (به کمک برهان خلف) گیریم که  $MN$  موازی  $BC$  نباشد. پس از نقطه  $M$  خط  $MD$  را چنان رسم می‌کنیم که موازی  $BC$  باشد و  $AC$  (یا امتداد آن را در نقطه  $D$ ) قطع کند. حال طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

و با مقایسه با فرض می‌توان نوشت:

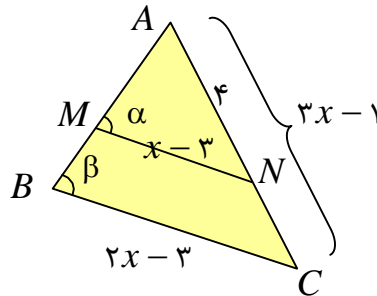
$$\frac{AN}{AC} = \frac{AD}{AC}$$

لذا :

$$AN = AD$$

و این وقتی ممکن است که نقطه‌ی  $D$  بر  $N$  منطبق باشد پس پاره‌خط  $MD$  بر  $MN$  منطبق می‌شود و چون  $MD \parallel BC$  پس  $MN \parallel BC$  و حکم ثابت است.

**تمرین ۱ :** در شکل زیر زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  مساویند. مقدار  $x$  را به دست آورید.



**حل :** چون زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  لذا خطوط  $MN$  و  $BC$  موازیند. لذا قضیه‌ی تالس را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

و چون اندازه‌های اضلاع  $AM$  و  $AB$  را نداریم. تناسب را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \rightarrow \frac{4}{3x-1} = \frac{x-3}{2x-3} \rightarrow (x-3)(3x-1) = 4(2x-3)$$

$$\rightarrow 3x^2 - x - 9x + 3 = 8x - 12 \rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\rightarrow (x - 5)(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

که با توجه به داده‌های مسئله جواب  $x = 1$  قابل قبول نیست.

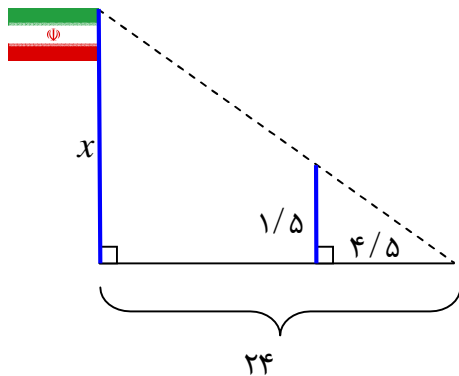
**تمرین ۲:** حامد برای تعیین ارتفاع پرچم مدرسه (که به آن

دسترسی ندارد). میله‌ای به ارتفاع  $1/5$  متر را طوری روی

زمین گذاشت که انتهای سایه‌ی میله و سایه‌ی پرچم روی

هم منطبق شوند. اگر طول سایه‌ی پرچم  $24$  متر و طول

سایه‌ی میله  $4/5$  متر باشد. ارتفاع پرچم را به دست آورید.



**حل:** چون پرچم و میله هر دو بر زمین عمودند، لذا موازی می‌باشند. پس طبق قضیه‌ی تالس می‌توان

نوشت:

$$\frac{x}{1/5} = \frac{24}{4/5}$$

لذا:

$$x = \frac{24 \times 1/5}{4/5} = 8 \text{ m}$$

\*\*\*

**۳:** به کمک قضیه‌ی تالس، ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی

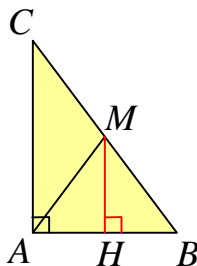
ی وتر است.

**حل:** در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل  $AM$  میانه‌ی وارد بر وتر  $BC$  می‌باشد.

بنابر تعریف میانه واضح است که  $MB = MC$

اکنون از نقطه‌ی  $M$  واقع بر ضلع  $AB$  خط  $MH$  را به صورت عمود رسم

می‌کنیم.



چون دو خط عمود بر یک خط موازیند، پس  $MH \parallel AC$

حال قضیه‌ی تالس را به صورت زیر می نویسیم.

$$\frac{BH}{AH} = \frac{BM}{CM} \xrightarrow{BM=CM} \frac{BH}{AH} = 1 \rightarrow BH = AH$$

پس  $MH$  ضلع  $AB$  را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند و چون بر آن نیز عمود است، لذا  $MH$  عمود منصف ضلع  $AB$  می باشد. حال چون نقطه‌ی  $M$  روی عمود منصف قرار دارد، پس از دو سر پاره خط  $AB$

به یک فاصله است. یعنی  $AM = MB$

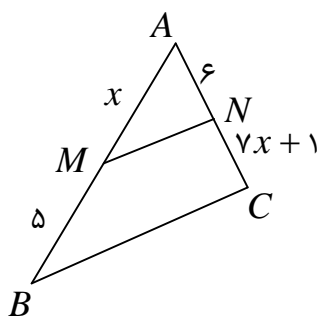
$$AM = \frac{AB}{2}$$

و این به معنی آن است که

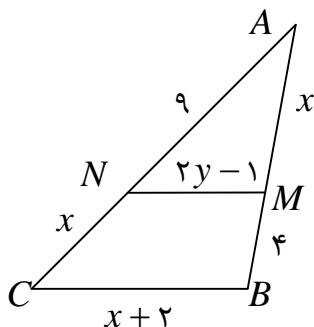
\*\*\*

### تمرین برای حل :

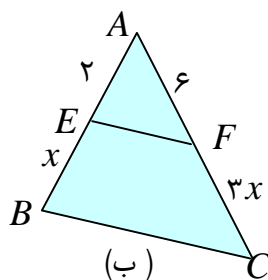
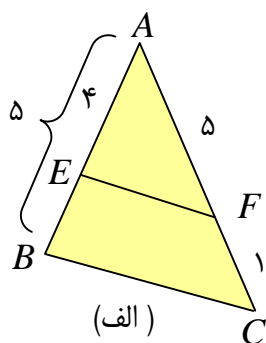
۴: در شکل زیر  $MN \parallel BC$  ، مقدار  $x$  را به دست آورید.



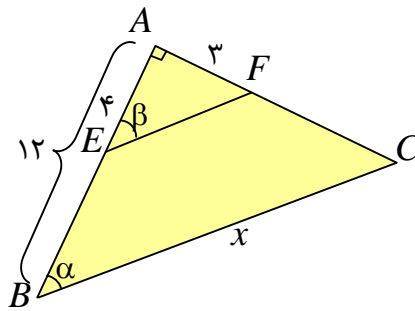
۵: در شکل مقابل  $MN \parallel BC$  ، مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.



۶: در کدام مورد  $EF \parallel BC$  است؟



۷: در شکل مقابل ( $\angle\alpha = \angle\beta$ )، مقدار  $x$  را به دست آورید.



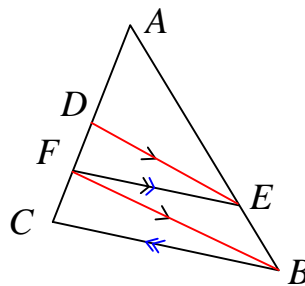
۸: ثابت کنید که اگر وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم، پاره خطی بوجود می‌آید که موازی ضلع سوم و برابر نصف آن است.

۹: ثابت کنید که در یک مثلث اگر از وسط یک ضلع خطی موازی ضلع دیگر رسم شود، این خط از وسط ضلع سوم می‌گذرد.

۱۰: ثابت کنید که اگر وسطهای اضلاع یک چهارضلعی محدب را به طور متوالی به هم وصل کنیم، چهارضلعی جدیدی به دست می‌آید که

اولاً: متوازی الاضلاع است. ثانیاً: مساحت آن نصف مساحت چهارضلعی اصلی است.

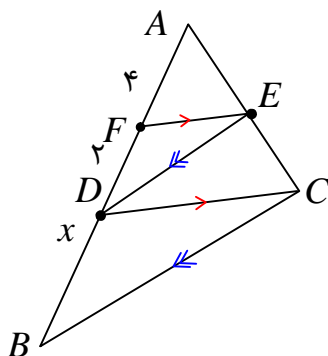
۱۱: در شکل زیر  $DE \parallel FB$  و  $FE \parallel BC$  ثابت کنید که  $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$



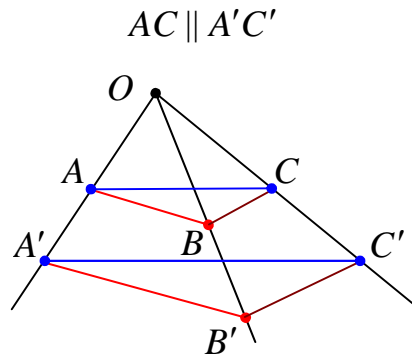
۱۲: با توجه به شکل مقابل اگر  $DE \parallel BC$  و  $FE \parallel DC$

اولاً: ثابت کنید که  $AD^2 = AF \cdot AB$

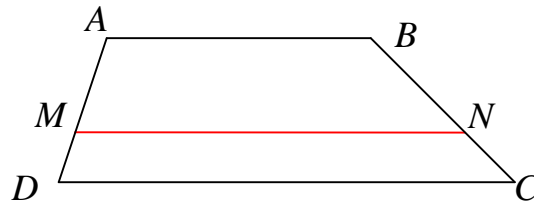
ثانیاً: مقدار  $x$  را به دست آورید.



۱۳: در شکل زیر  $AB \parallel A'B'$  و  $BC \parallel B'C'$  با استفاده از قضیه‌ی تالس و عکس آن ثابت کنید:



۱۴: در ذوزنقه‌ی زیر  $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید،  $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$  (قضیه‌ی تالس در ذوزنقه)



۱۵: یک پاره خط به طول ۵ سانتی متر رسم کنید و سپس به کمک قضیه‌ی تالس آن به سه پاره خط مساوی تقسیم کنید. آیا می‌توان این پاره خط را به دو قسمت طوری تقسیم کرد که یکی دو برابر دیگری باشد؟ توضیح دهید.

\*\*\*

## تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

## درس سوم: تشابه مثلث‌ها

در این درس ابتدا مفهوم تشابه برای چند ضلع‌های را بیان و سپس موضوع تشابه را فقط برای مثلث‌ها ادامه می‌دهیم.

### تشابه چند ضلعی‌ها

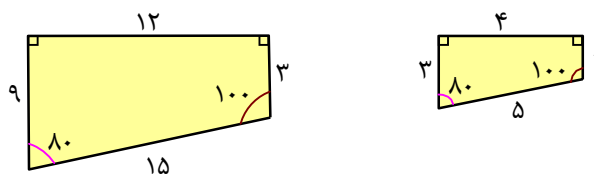
تعریف: دو چندضلعی را متشابه گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

الف: تعداد اضلاع آنها برابر باشند.

ب: زاویه‌های متناظر آنها مساوی باشند.

ج: اضلاع متناظر آنها متناسب باشند.

**مثال ۱:** با توجه به تعریف فوق، دو چهارضلعی شکل زیر متشابه‌اند.



**مثال ۲:** دو لوزی ممکن است متشابه نباشند، زیرا زاویه‌های متناظر آنها ممکن است مساوی نباشند.

**مثال ۳:** دو مستطیل ممکن است متشابه نباشند، زیرا اضلاع متناظر آنها ممکن است متناسب نباشند.

تعریف: در دو مثلث متشابه، دو ضلع را متناظر گویند، هرگاه روبرو به زاویه‌های مساوی باشند. همچنین

نسبت اندازه‌های اضلاع متناظر، از دو چندضلعی متشابه را **نسبت تشابه** گویند.

در مثال شماره‌ی ۱ نسبت تشابه می‌تواند  $\frac{۱۲}{۴} = ۳$  یا  $\frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$  باشد که می‌نویسند:

$$k = \frac{۱۲}{۴} = ۳ \quad \text{یا} \quad k = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

نتیجه:

**۱:** هر چند ضلعی با خودش متشابه است.

**۲:** اگر دو چند ضلعی با یک چند ضلعی دیگر متشابه باشند، خود با هم متشابه‌اند.



۳: هر دو چند ضلعی همزهشت متشابهند و نسبت تشابه آنها برابر یک است.

مثال ۴: هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند.

مثال ۵: هر دو مربع متشابهند<sup>۱</sup>.

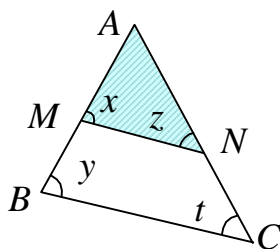
\*\*\*

### تشابه مثلث ها

برای ورود به بحث تشابه مثلث ها ، لازم است ابتدا با قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث آشنا شویم.

**قضیه (قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث ها):** اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود به طوری که دو ضلع

دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلثی بوجود می‌آورد که با مثلث اصلی متشابه است.



فرض:  $MN \parallel BC$

حکم:  $\triangle AMN \sim \triangle ABC$

اثبات: کافی است که نشان دهیم ، شرط های مربوط به تعریف تشابه را برقرارند.

شرط اول: برابری تعداد اضلاع دو مثلث که بدیهی است.

شرط دوم: تساوی زاویه‌های متناظر

زاویه ی  $A$  در دو مثلث مشترک است. از طرفی چون  $MN \parallel BC$  پس  $\angle x = \angle y$  و  $\angle z = \angle t$

پس زاویه های نظیر مساویند.

شرط سوم: تناسب اضلاع متناظر

چون  $MN \parallel BC$  پس طبق قضیه‌ی تالس داریم  $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$  . در نتیجه اضلاع متناسبند.

\*\*\*

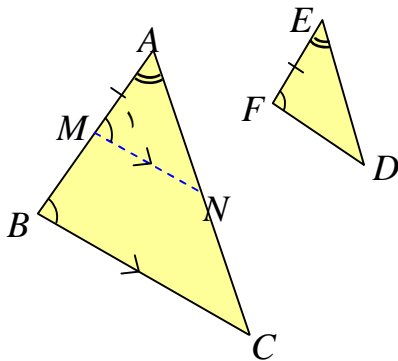
<sup>1</sup> . و به طور کلی هر دو چند ضلعی منتظم متشابهند.

حال با توجه به قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث، می‌توان سه قضیه‌ی اصلی برای حالت‌های مختلف تشابه دو مثلث بیان کرد.

### قضایای اصلی تشابه دو مثلث

**قضیه ۱:** اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند آن دو مثلث متشابهند.

(حالت تساوی دو زاویه)



فرض:  $\angle A = \angle E$  و  $\angle B = \angle F$

حکم:  $\triangle ABC \sim \triangle EFD$

اثبات: نقطه‌ی  $M$  را روی ضلع  $AB$  طوری انتخاب می‌کنیم

که  $AM = EF$  باشد و از آن پاره‌خطی موازی  $BC$  رسم

می‌کنیم تا  $AC$  را در نقطه‌ی  $N$  قطع کند.

پس  $\angle B = \angle M$ . لذا با توجه به فرض می‌توان نوشت  $\angle F = \angle M$

حال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{E} \\ AM = EF \\ \hat{M}_1 = \hat{F} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle AMN \cong \triangle EFD \rightarrow \triangle AMN \sim \triangle EFD \quad (1)$$

(ز ض ز)

و چون  $BC \parallel MN$  پس طبق قضیه‌ی اساسی تشابه: (۲)

$$\triangle ABC \sim \triangle AMN$$

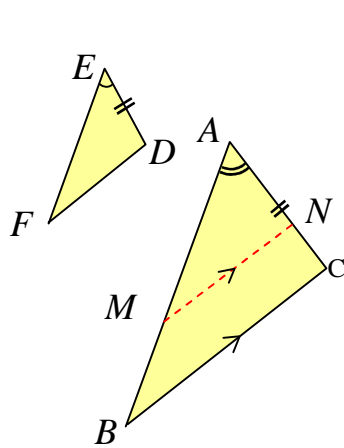
و از نتایج ۱ و ۲ داریم:  $\triangle ABC \sim \triangle EFD$

\*\*\*

**قضیه ۲:** اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها

متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابهند.

(حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه‌های بین آنها)



فرض:  $\angle A = \angle E$  و  $\frac{EF}{AB} = \frac{ED}{AC}$

حکم:  $\triangle ABC \sim \triangle EFD$

اثبات: نقطه‌ی  $N$  را روی ضلع  $AC$  طوری انتخاب می‌کنیم که  $AN = ED$  سپس از نقطه‌ی  $N$  خطی موازی ضلع  $BC$  رسم می‌کنیم تا  $AB$  را در نقطه‌ی  $M$  قطع کند. بنابر قضیه‌ی تالس

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

حال ضلع مساوی  $AN$  یعنی  $ED$  را در رابطه فوق جایگزین می‌کنیم پس

$$\frac{AM}{AB} = \frac{ED}{AC}$$

و در مقایسه با فرض داریم  $AM = EF$  و در نتیجه دو مثلث  $AMN$  و  $EFD$  بنا به حالت (ضرض)

همنهشت هستند یعنی  $\triangle(AMN) \cong \triangle(EFD) \rightarrow \triangle(AMN) \sim \triangle(EFD)$  (۱)

از طرفی چون  $MN \parallel BC$  پس طبق قضیه اصلی تشابه  $\triangle(AMN) \sim \triangle(ABC)$  (۲)

و از نتایج (۱) و (۲) داریم:  $\triangle(ABC) \sim \triangle(EFD)$

\*\*\*

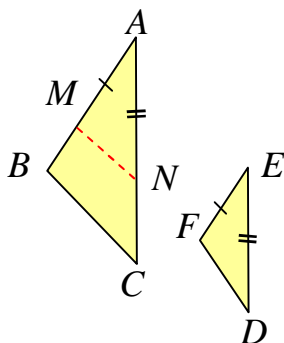
**قضیه‌ی ۳:** هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

(حالت تناسب سه ضلع)

فرض:  $\frac{EF}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{FD}{BC}$

حکم:  $\triangle ABC \sim \triangle EFD$

اثبات: پاره خط  $AM$  را به اندازه‌ی  $EF$  روی  $AB$  و پاره خط  $AN$  به اندازه‌ی  $ED$  روی  $AC$  جدا کرده‌اند نگاه داریم:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

و طبق عکس قضیه تالس می‌توان نوشت:  $MN \parallel BC$

پس طبق قضیه‌ی اساسی تشابه  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$  و با مقایسه با فرض داریم  $MN = FD$  لذا

دو مثلث  $AMN$  و  $EFD$  بنا به حالت (ضضض) هم‌نهشت هستند یعنی:

$$\triangle AMN \cong \triangle EFD \rightarrow \triangle AMN \sim \triangle EFD \quad (1)$$

از طرفی چون  $MN \parallel BC$  پس بنا به قضیه‌ی اساسی تشابه

$$\triangle AMN \sim \triangle ABC \quad (2)$$

و از نتایج (۱) و (۲) داریم:

$$\triangle ABC \sim \triangle EFD$$

**توصیه:** هنگام نوشتن نسبت اضلاع متناظر از دو شکل متشابه لازم است به دو نکته‌ی زیر توجه نمود.

**۱:** صورت‌ها مربوط به یک شکل و مخرج‌ها مربوط به شکل دیگر باشند.

**۲:** دو ضلع در یک نسبت (کسر) قرار می‌گیرند، هرگاه روبرو به زاویه‌های مساوی باشند.

### تمرین برای حل:

**۱:** در مورد هر یک از موارد زیر بحث کنید.

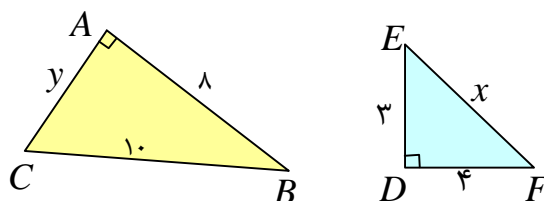
الف: اگر یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه با یک زاویه‌ی حاده از مثلث قائم الزاویه‌ی دیگری

مساوی باشند، آیا آن دو مثلث متشابهند؟

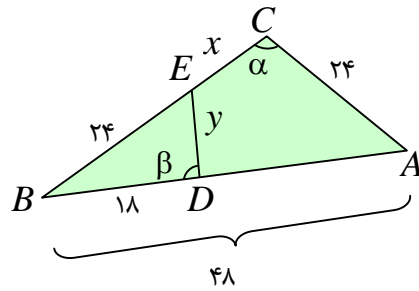
ب: اگر یک زاویه از یک مثلث متساوی الساقین با یک زاویه از مثلث متساوی الساقین دیگری مساوی

باشند، آیا آن دو مثلث متشابهند؟

**۲:** آیا دو مثلث قائم الزاویه‌ی زیر متشابهند؟ چرا؟

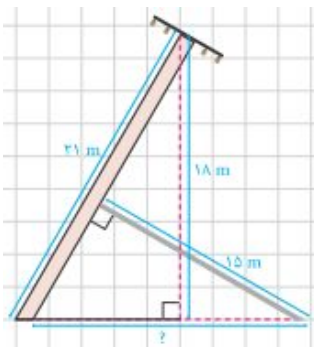
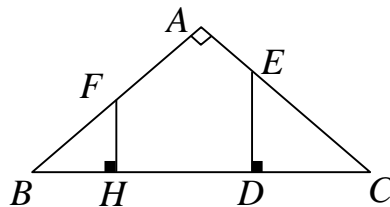


۳: در شکل زیر  $\angle \alpha = \angle \beta$  است. طول  $y$  و  $x$  را پیدا کنید.



۴: ثابت کنید که دو مثلث  $CDE$  و  $BHF$  متشابهند و نتیجه بگیرید که:

$$BH \times DC = FH \times DE$$



۵: مطابق شکل روبرو ، یک دکل انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش

باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد.

می خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر ، عمود بر آن ، آن را

به طور موقت سرپا نگه داریم. پای تیر فلزی را باید در چه فاصله ای از پای

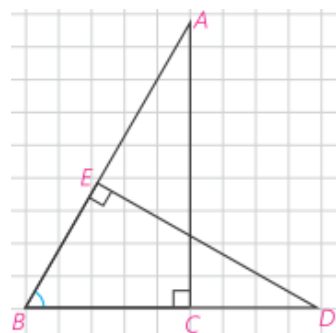
تیر انتقال برق محکم کنیم؟

حل : با توجه به شکل زیر واضح است که دو مثلث  $BDE$  و  $ABC$  به حالت تساوی دو زاویه ، متشابهند.

لذا می توان نوشت:

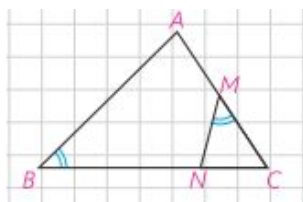
$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \rightarrow \frac{15}{18} = \frac{BD}{21}$$

$$\rightarrow BD = \frac{21 \times 15}{18} = 17.5 \text{ cm}$$



یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصله‌ی  $۱۷/۵$  متری از پای دکل برق محکم کرد.

۶: در مثلث  $ABC$ ، از نقطه‌ی  $M$  وسط  $AC$ ، زاویه‌ی  $NMC$  را مساوی زاویه‌ی  $B$  جدا کرده ایم. اگر  $NC = ۲$  و  $NB = ۴$ ، طول  $AC$  را به دست آورید.



حل: با کمی دقت مشاهده می‌کنید که مثلث‌های  $ABC$  و  $MNC$ ، دو زاویه‌ی هم‌اندازه دارند و در نتیجه متشابه‌اند. از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم.

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

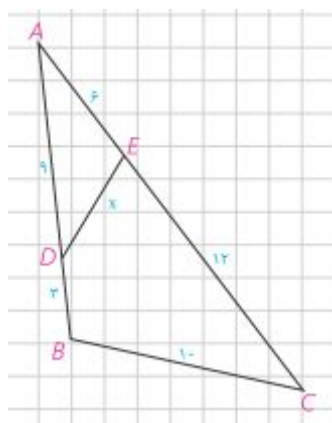
و چون  $MC = \frac{AC}{۲}$  می‌توان نوشت:

$$\frac{AC}{۲BC} = \frac{NC}{AC} \rightarrow AC^2 = ۲NC \cdot BC = ۲NC(NC + NB)$$

$$\rightarrow AC^2 = ۲ \times ۲(۲ + ۴) = ۲۴ \rightarrow AC = ۲\sqrt{۶}$$

\*\*\*

۷: در شکل مقابل، اندازه‌ی هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه‌ی  $x$  را به دست آورید.



حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که دو مثلث  $ABC$  و  $ADE$  متشابه‌اند.

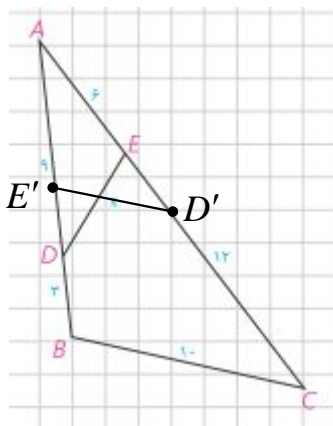
$$\left. \begin{array}{l} \frac{AE}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \angle A = \angle A \\ \frac{AD}{AC} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \Delta(ABC) \approx \Delta(ADE) \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\rightarrow \frac{6}{12} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 5$$

۸: در شکل تمرین قبل، اگر روی  $AC$ ،  $AD'$  را هم اندازه‌ی  $AD$  و روی  $AB$ ،  $AE'$  را هم اندازه‌ی

$AE$  جدا کنیم. ثابت کنید که  $D'E' \parallel BC$

حل :



$$\Delta(ABC) \approx \Delta(ADE) \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{AE'}{AB} = \frac{AD'}{AC} \rightarrow D'E' \parallel BC$$

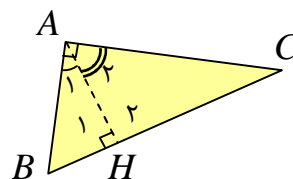
\*\*\*

### اثبات قضیه‌ی فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه‌ی دیگر تبدیل می‌کند. این

دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابهند.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta(ABH): \angle A_1 + \angle B = 90^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = 90^\circ \\ \angle A_1 = \angle C \\ \angle H_1 = \angle A = 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ABC) \quad (۱)$$



$$\left. \begin{array}{l} \Delta(ACH) : \angle A_{\gamma} + \angle C = 90^{\circ} \\ \Delta(ABC) : \angle B + \angle C = 90^{\circ} \end{array} \right\} \rightarrow \angle A_{\gamma} = \angle C$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_{\gamma} = \angle B \\ \angle H_{\gamma} = \angle A = 90^{\circ} \end{array} \right\} \rightarrow \Delta(ACH) \approx \Delta(ABC) \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ACH)$$

**قضیه:** در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

اثبات:

$$\Delta(ABH) \approx \Delta(ACH) \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \rightarrow AH^2 = BH \times CH$$

**قضیه:** در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر، با حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی

قائمه‌ی مثلث برابر است.

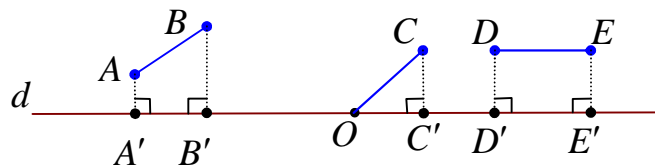
اثبات: کافی است مساحت مثلث قائم الزاویه را به دو شکل متفاوت محاسبه کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} S(ABC) = \frac{1}{2}(AB)(AC) \\ S(ABC) = \frac{1}{2}(AH)(BC) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{2}(AH)(BC) = \frac{1}{2}(AB)(AC)$$

$$\rightarrow (AH)(BC) = (AB)(AC)$$

**توجه:** اگر  $AB$  پاره خط غیرمنطبق بر خط  $d$  باشد، تصویر پاره خط  $AB$  روی خط  $d$  پاره خطی است

مانند  $A'B'$  می‌باشد هرگاه  $AA' \perp d$  و  $BB' \perp d$  باشد.



**قضیه:** در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازه‌ی هر ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب اندازه‌ی وتر در اندازه‌ی

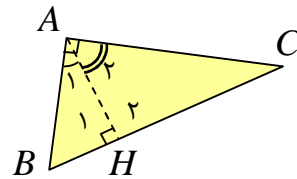
تصویر همان ضلع بر وتر برابر است.

اثبات:



$$\Delta(ABH) \approx \Delta(ABC) \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \rightarrow AB^2 = BC \times BH$$



$$\Delta(ACH) \approx \Delta(ABC) \rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \rightarrow AC^2 = BC \times CH$$

**قضیه:** در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است (قضیه‌ی فیثاغورس).

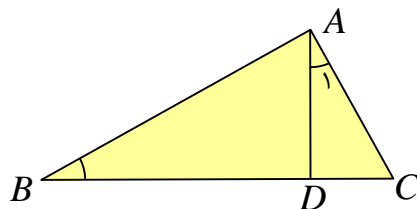
اثبات :

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = BC \times BH \\ AC^2 = BC \times CH \end{array} \right\} \rightarrow AB^2 + AC^2 = BC \times BH + BC \times CH$$

$$\rightarrow AB^2 + AC^2 = BC(BH + CH) = BC \times BC = BC^2$$

\*\*\*

**تمرین ۹:** در شکل روبرو  $\angle A_1 = \angle B$  و  $AC = 4$  و  $BD = 6$  . طول  $BC$  را به دست آورید.



حل : قرار می دهیم  $BC = x$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle B \\ \angle C = \angle C \end{array} \right\} \rightarrow \Delta(ADC) \approx \Delta(ABC) \rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

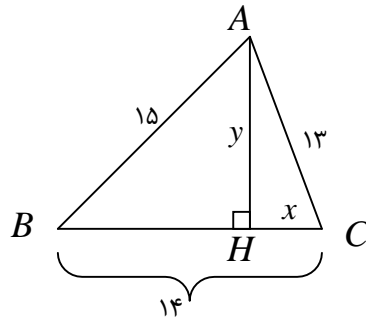
$$\rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{x-6}{4} \rightarrow x^2 - 6x = 16 \rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\rightarrow (x-8)(x+2) = 0 \rightarrow x = 8, x = -2$$

جواب  $x = -2$  غیر قابل قبول است.

\*\*\*

**تمرین ۱۰:** در شکل روبرو، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های  $ABH$  و  $ACH$ ، مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



حل: واضح است که  $BH = 14 - x$

لذا می‌توان نوشت:

$$\Delta(ACH): x^2 + y^2 = 13^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 169 \quad (1)$$

$$\Delta(ABH): (14 - x)^2 + y^2 = 15^2 \rightarrow 196 - 28x + x^2 + y^2 = 225 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 196 - 28x + 169 = 225 \rightarrow -28x = -140 \rightarrow x = 5$$

حال به کمک رابطه‌ی (۱) می‌توان مقدار  $y$  را نیز به دست آورد.

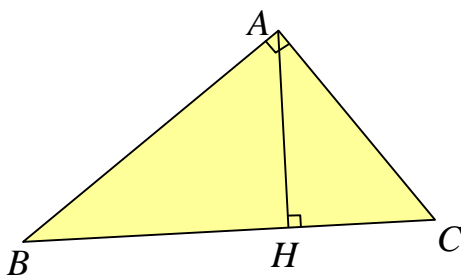
$$(5)^2 + y^2 = 169 \rightarrow 25 + y^2 = 169 \rightarrow y^2 = 144 \rightarrow y = 12$$

\*\*\*

**تمرین برای حل:**

**۱۱:** در مثلث قائم‌الزاویه زیر، در هر حالت، اندازه‌ی پاره

خط خواسته شده را به دست آورید.



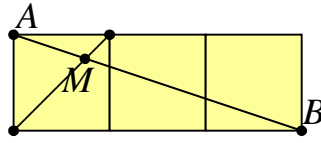
الف)  $AC = ?$  و  $AB = ?$  و  $AH = ?$  و  $BH = 9$  و  $BC = 10$

ب)  $AB = ?$  و  $AH = ?$  و  $BC = ?$  و  $CH = 2$  و  $AC = 5$

پ)  $AH = ?$  و  $BC = ?$  و  $AC = 6$  و  $AB = 8$

ت)  $AC = ?$  و  $BC = ?$  و  $BH = ?$  و  $AH = 6$  و  $AB = 12$

۱۲: در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند. اندازه‌ی پاره خط  $MA$  را به دست آورید.



\*\*\*

## تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

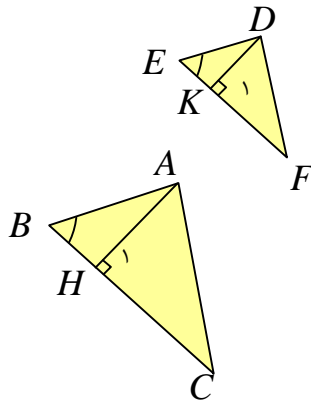
استان خوزستان

## درس چهارم : کاربردهایی از قضیه ی تالس و تشابه مثلث ها

در این درس کاربرد هایی از قضیه‌ی تالس و تشابه دو مثلث را بیان می کنیم.

### ☑ قضایای پاره خطهای متناسب در دو مثلث متشابه

**قضیه :** نسبت ارتفاعهای متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض  $\Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$  و  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$

حکم :  $\frac{AH}{DK} = k$

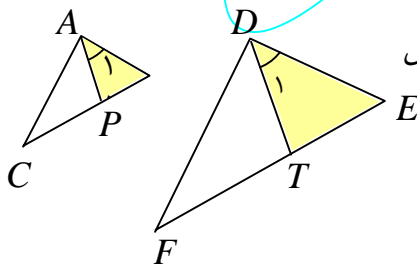
**اثبات :** چون دو مثلث  $ABC$  و  $DEF$  متشابهند، پس  $\angle B = \angle E$

از طرفی  $\angle H_1 = \angle K_1 = 90^\circ$  لذا

$$\Delta(ABH) \sim \Delta(DEK) \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BH}{EK} = \frac{AH}{DK}$$

و چون  $\frac{AB}{DE} = k$  پس  $\frac{AH}{DK} = k$

**قضیه :** نسبت نیمسازهای متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض  $\Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$  و  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$

حکم :  $\frac{AP}{DT} = k$

**اثبات :** چون دو مثلث  $ABC$  و  $DEF$  متشابهند

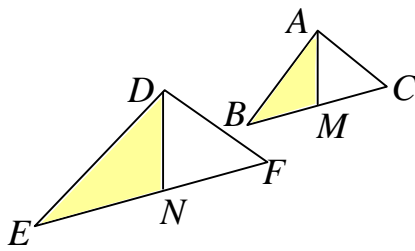
پس  $\angle A = \angle D$  و  $\angle B = \angle E$  از طرفی چون  $AP$  و  $DT$

نیمساز هستند، لذا  $\angle A_1 = \angle D_1$  در نتیجه :

$$\Delta(ABP) \sim \Delta(DET) \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AP}{DT} = \frac{BP}{ET}$$

و چون  $\frac{AB}{DE} = k$  پس  $\frac{AP}{DT} = k$

**قضیه :** نسبت میانه‌های متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض:  $\Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$  و  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$

حکم:  $\frac{AM}{DN} = k$

**اثبات :** چون دو مثلث  $ABC$  و  $DEF$  متشابهند،

پس  $\angle B = \angle E$  و  $\frac{AB}{DE} = k$  و  $\frac{BC}{EF} = k$  از طرفی چون  $BC = 2BM$  و  $EF = 2EN$  پس:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{2BM}{2EN} = \frac{BM}{EN} = k$$

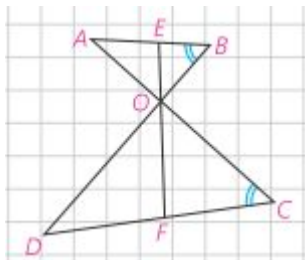
و در نتیجه  $\Delta(ABM) \sim \Delta(DEN)$  در نتیجه

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BM}{EN} = \frac{AM}{DN}$$

و چون  $\frac{AB}{DE} = k$  لذا  $\frac{AM}{DN} = k$

\*\*\*

**تمرین برای حل :**



۱: در شکل مقابل،  $\angle B = \angle C$

الف: چرا دو مثلث  $OAB$  و  $OCD$  متشابه اند؟

ب: اگر  $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت  $\frac{OE}{OF}$  چقدر است؟

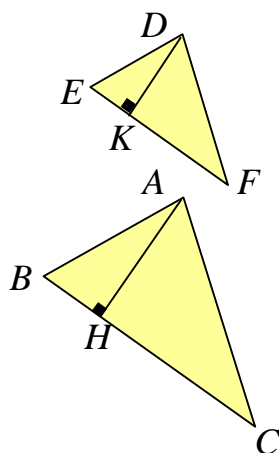
ج: اگر  $EF = 10 \text{ cm}$  نیمساز دو زاویه‌ی متقابل به رأس  $O$  است. طول های  $OE$  و  $OF$  را به دست

آورید.

\*\*\*

✓ قضایای محیط و مساحت مثلث های متشابه

**قضیه:** نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با توان دوم نسبت تشابه آنها برابر است.



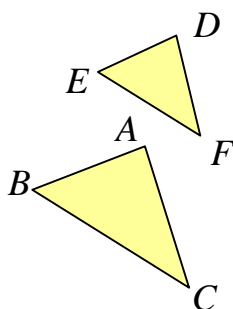
$$\text{فرض: } \Delta ABC \sim \Delta DEF \text{ و } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$$

$$\text{حکم: } \frac{S_{\Delta(ABC)}}{S_{\Delta(DEF)}} = k^2$$

**اثبات:** با توجه به قضیه‌ی قبل داریم:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEF}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AH}{\frac{1}{2} EF \cdot DK} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AH}{DK} = k \cdot k = k^2$$

**قضیه:** نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آنها برابر است.



$$\text{فرض: } \Delta ABC \sim \Delta DEF \text{ و } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$$

$$\text{حکم: } \frac{P_{\Delta(ABC)}}{P_{\Delta(DEF)}} = k$$

**اثبات:** با توجه به خواص تناسب داریم:

$$\begin{aligned} \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta DEF}} &= \frac{AB + BC + AC}{DE + EF + DF} = \frac{k(DE) + k(EF) + k(DF)}{DE + EF + DF} \\ &= \frac{k(DE + EF + DF)}{(DE + EF + DF)} = k \end{aligned}$$

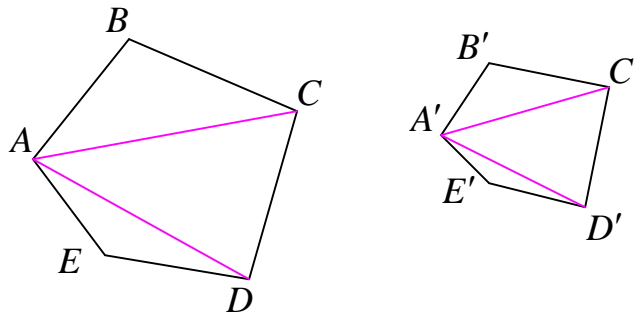
\*\*\*

### تعمیم قضیه های مساحت و محیط دو چند ضلعی متشابه

قضیه های مساحت و محیط دو مثلث متشابه را می توان برای هر دو چند ضلعی متشابه، نیز تعمیم داد. به قضیه های زیر توجه کنید.

**قضیه :** نسبت مساحت های دو چند ضلعی متشابه با توان دوّم نسبت تشابه آنها برابر است.

**اثبات :** با رسم قطرهای گذرنده از یک رأس در چند ضلعی، می توان آن را به چند مثلث تقسیم کرد. حال اگر قطرهای گذرنده از رأس متناظر در چند ضلعی دیگر را رسم کنیم. تمامی مثلث بدست آمده در هر دو چهارضلعی، نظیر به نظیر متشابهند. لذا با توجه به نسبت مساحت های مثلث ها می توان نتیجه گرفت که نسبت مساحت های چند ضلعی ها با توان دوّم نسبت تشابه آنها برابر است.



$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} &= \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = k^2 \\ \frac{S_{ACD}}{S_{A'C'D'}} &= \left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2 = k^2 \\ \frac{S_{ADE}}{S_{A'D'E'}} &= \left(\frac{ED}{E'D'}\right)^2 = k^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE}}{S_{A'B'C'} + S_{A'C'D'} + S_{A'D'E'}} = k^2$$

$$\rightarrow \frac{S_{ABCDE}}{S_{A'B'C'D'E'}} = k^2$$

**قضیه :** نسبت محیط های دو چند ضلعی متشابه با نسبت تشابه آنها برابر است.

**اثبات :** از متشابه بودن چند ضلعی ها می توان نوشت :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{ED}{E'D'} = \frac{AE}{A'E'} = k$$

$$\rightarrow \frac{AB + BC + CD + ED + AE}{A'B' + B'C' + C'D' + E'D' + A'E'} = k$$

$$\rightarrow \frac{P_{ABCDE}}{P_{A'B'C'D'E'}} = k$$

\*\*\*

### تمرین برای حل :

۲ : نسبت اضلاع متناظر از دو مثلث متشابه برابر  $\frac{۵}{۶}$  می‌باشد.

الف : اگر اندازه‌ی یک ضلع از مثلث کوچک  $\frac{۷}{۵}$  سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی ضلع متناظر آن را از مثلث بزرگتر به دست آورید.

ب : اگر اندازه‌ی یک ضلع از مثلث بزرگ ۱۲ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی ضلع متناظر آن را از مثلث کوچکتر به دست آورید.

ج : اگر اندازه‌ی ضلع یکی از این دو مثلث ۶۰ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی ضلع متناظر آن را از مثلث دیگر را به دست آورید.

د : نسبت میان‌ها، ارتفاع‌ها و نیمسازهای متناظر از این دو مثلث را بنویسید.

هـ : نسبت مساحت‌ها و محیط‌های این دو مثلث را بنویسید.

۳ : نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه  $\frac{۸۱}{۲۵}$  است، نسبت محیط‌های این دو مثلث را پیدا کنید.

۴ : طول‌های اضلاع یک مثلث ۹ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

۵ : مثلث‌های  $ABC$  و  $A'B'C'$  متشابه‌اند. اگر طول ضلع‌های مثلث  $ABC$  برابر ۵ و ۸ و ۱۱ سانتی‌متر و محیط مثلث  $A'B'C'$  برابر ۶۰ سانتی‌متر باشد. طول ضلع‌های مثلث  $A'B'C'$  را به دست آورید.

۶ : دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  برابر  $\frac{۱}{۴}$

می‌باشد اگر اضلاع مثلث  $ABC$  برابر ۶ و ۸ و ۱۰ باشد،

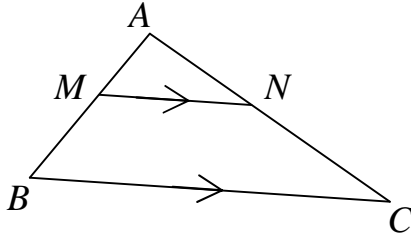


الف : طول اضلاع مثلث  $A'B'C'$  را بیابید. ب : نسبت محیط‌های دو مثلث را به دست آورید.

۷ : اگر مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ با مثلثی دیگر به محیط ۱۸ متشابه باشد. مساحت مثلث دوم را بدست آورید.

۸ : در شکل روبرو  $BC \parallel MN$  است و مساحت ذوزنقه‌ی  $MNCB$  هشت برابر مساحت مثلث  $AMN$

است. نسبت  $\frac{MB}{MA}$  را به دست آورید.



حل : با توجه به صورت مسئله می توان نوشت :

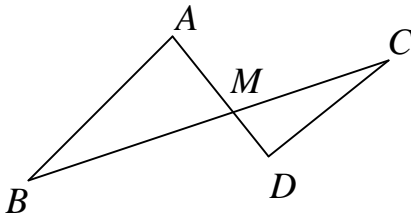
$$\frac{S_{MNCB}}{S_{ABC}} = 8$$

$$\rightarrow \frac{S_{MNCB} + S_{AMN}}{S_{AMN}} = \frac{8+1}{1} \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = 9 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = 3$$

از طرفی :

$$\frac{AB}{AM} = 3 \rightarrow \frac{AB - AM}{AM} = \frac{3-1}{1} \rightarrow \frac{MB}{AM} = \frac{2}{1} = 2$$

۹ : در شکل مقابل  $AB \parallel CD$  و  $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{5}$ . نسبت مساحت های دو مثلث را به دست آورید.



۱۰ : اندازه های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می کنیم. بدون اینکه زاویه ها را تغییر دهیم، مساحت

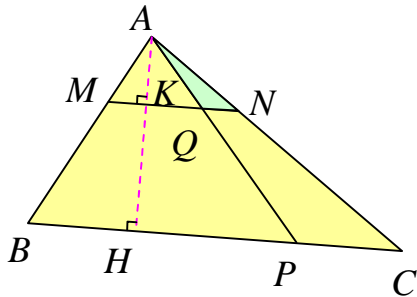
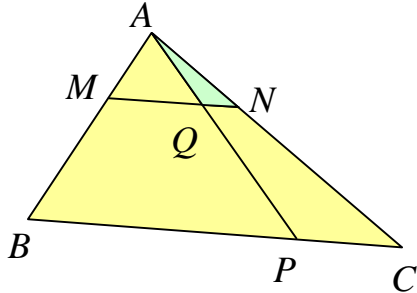
هفت ضلعی چند برابر می شود. چرا؟

\*\*\*

حل چند تمرین :

۱: در مثلث  $ABC$ ، خط  $MN$  موازی ضلع  $BC$  است و  $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$  است. تعیین کنید

که  $S(AQN)$  و  $S(MQPB)$  چه کسری از مساحت مثلث  $ABC$  است؟



حل: ارتفاع  $AH$  را رسم می‌کنیم.

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{AM}{AM + MB} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{PC}{PC + PB} = \frac{1}{1 + 3} = \frac{1}{4}$$

از آنجا که  $BC \parallel MN$  نتیجه می‌شود که:

$$\Delta(AMN) \approx \Delta(ABC) \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3} \quad (1), \quad \frac{AK}{AH} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta(AQN) \approx \Delta(APC) \rightarrow \frac{AQ}{AP} = \frac{QN}{PC} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{S(AQN)}{A(ABC)} = \frac{\frac{1}{2} AK \times QN}{\frac{1}{2} AH \times BC} = \frac{AK}{AH} \times \frac{QN}{BC} \xrightarrow{\frac{AK}{AH} = \frac{1}{3}} \frac{S(AQN)}{A(ABC)} = \frac{1}{3} \times \frac{QN}{BC}$$

$$\frac{\frac{QN}{PC} = \frac{1}{3}}{\rightarrow} \frac{S(AQN)}{A(ABC)} = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{3} PC}{BC} = \frac{1}{9} \times \frac{PC}{BC}$$

$$\frac{\frac{PC}{BC} = \frac{1}{4}}{\rightarrow} \frac{S(AQN)}{A(ABC)} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{\frac{MQ}{MN} = \frac{3}{4}}{\rightarrow} MQ = \frac{3}{4} MN \xrightarrow{\frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}} MQ = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{3} BC \right) = \frac{1}{4} BC$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

$$S(MQPB) = A(ABP) - S(AMQ)$$

$$S(ABP) = \frac{1}{2} (BP \times AH) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} BC \times AH = \frac{3}{4} S(ABC)$$

$$S(AMQ) = \frac{1}{2} MQ \times AK = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} BC \times \frac{1}{3} AH \right) = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{4} BC \times AH \right) = \frac{1}{12} S(ABC)$$

در نهایت نتیجه می شود:

$$S(MQPB) = \frac{3}{4} S(ABC) - \frac{1}{12} S(ABC) = \frac{8}{12} S(ABC)$$

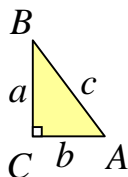
$$\rightarrow \frac{S(MQPB)}{S(ABC)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

\*\*\*

**۲:** سه چند ضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم الزاویه می سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی

روی وتر برابر مجموع مساحت های ساخته شده روی ضلع های زاویه ی قائمه است.

حل :



با توجه به مثلث قائم الزاویه ی روبرو داریم:

$$a^2 + b^2 = c^2 \xrightarrow{\div c^2} \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad (*)$$

چند ضلعی ساخته شده روی ضلع  $c$  با چند ضلعی ساخته شده روی ضلع  $a$  متشابه است و نسبت تشابه آنها

$$\frac{a}{c} \text{ است. لذا}$$

$$\frac{S_a}{S_c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

چند ضلعی ساخته شده روی ضلع  $c$  با چند ضلعی ساخته شده روی ضلع  $b$  متشابه است و نسبت تشابه آنها

$$\frac{b}{c} \text{ است. لذا}$$

$$\frac{S_b}{S_c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}$$

اکنون با توجه به رابطه‌ی (\*) می‌توان نوشت:

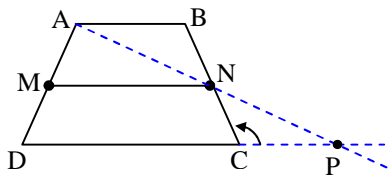
$$\frac{S_a}{S_c} + \frac{S_b}{S_c} = 1 \xrightarrow{\times S_c} S_a + S_b = S_c$$

\*\*\*

**جهت مطالعه :**

**قضیه :** پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع آنها است.

$$MN \parallel AB \parallel DC \text{ و } MN = \frac{AB + DC}{2} \text{ حکم}$$



**اثبات :** نقطه‌ی  $A$  را به نقطه‌ی  $N$  وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا خط  $AN$  امتداد قاعده‌ی  $CD$  را در نقطه‌ی  $P$  قطع کند. در این صورت مثلث‌های  $ABN$  و  $PCN$  به حالت (ض‌ض)

$$AB = PC \text{ و } AN = NP \text{ هستند لذا}$$

بنابراین  $MN$  پاره‌خطی است که وسط‌های دو ضلع  $AD$  و  $AP$  از مثلث  $ADP$  را به هم وصل می‌کند

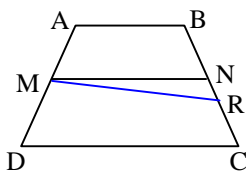
$$MN \parallel DP \text{ پس:}$$

$$MN \parallel AB \parallel DC \text{ و چون } AB \parallel DP$$

همچنین

$$MN = \frac{DP}{2} = \frac{PC + DC}{2} \xrightarrow{AB = PC} MN = \frac{AB + DC}{2}$$

**قضیه :** خطی که از وسط یک ساق دوزنقه موازی دو قاعده رسم می‌شود از وسط ساق دیگر می‌گذرد و جزئی از آن که در داخل دوزنقه می‌افتد نصف مجموع دو قاعده است.



**اثبات** (به روش برهان خلف) : گیریم که  $N$  وسط  $BC$  نباشد، نقطه‌ی  $M$

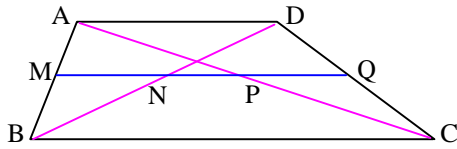
را به  $R$  وسط  $BC$  وصل می‌کنیم پس  $MR \parallel DC$  از طرفی

$MN \parallel DC$  پس باید  $MR$  بر  $MN$  منطبق باشد در این صورت نقطه‌ی

$R$  بر نقطه‌ی  $N$  منطبق خواهد بود پس نقطه‌ی  $N$  وسط  $BC$  است.

$$MN = \frac{AB + CD}{2} \text{ لذا}$$

**تمرین:** ثابت کنید که دو قطر دوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود، پاره‌خطی جدا می‌کنند که اندازه‌ی آن مساوی نصف تفاضل دو قاعده است.



$$\text{حکم: } NP = \frac{BC - AD}{2}$$

حل: با توجه به قضیه‌های قبل داریم

$$\Delta ABC: (AM = MB \text{ و } MP \parallel BC) \rightarrow MP = \frac{BC}{2} \text{ و } AP = PC \quad (1)$$

$$\Delta ACD: (AP = PC \text{ و } PQ \parallel AD) \rightarrow PQ = \frac{AD}{2} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABD: (MA = MB \text{ و } MN \parallel AD) \rightarrow MN = \frac{AD}{2} \\ \Delta ADC: (PA = PC \text{ و } PQ \parallel AD) \rightarrow PQ = \frac{AD}{2} \end{array} \right\} \rightarrow PQ = MN \quad (3)$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$NP = MP - MN \rightarrow NP = MP - PQ$$

$$\Rightarrow NP = \frac{BC}{2} - \frac{AD}{2} = \frac{BC - AD}{2}$$

\*\*\*

## تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان