

هندسه ۱

پایه می دهم « رشته می ریاضی و فیزیک »

فصل (۳) : چندضلعی ها و مساحت

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

مهر ۱۳۹۵

فصل سوم

درس اول: چندضلعی‌ها و ویژگی‌های آنها

در این درس، مفهوم چند ضلعی را معرفی و سپس چهارضلعی‌های مهم و ویژگی‌های آنها را بیان می‌کنیم.

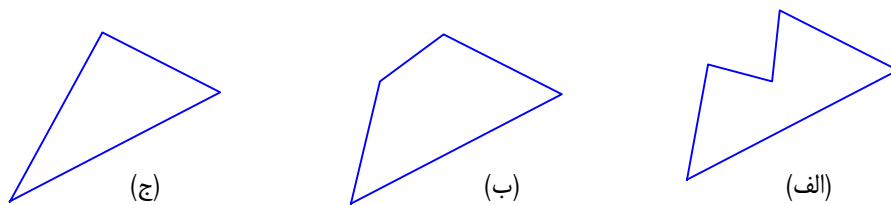
مفهوم چند ضلعی

هر شکل که از اجتماع حداقل سه پاره خط با ویژگی‌های زیر باشد، را **چند ضلعی** می‌نامند.

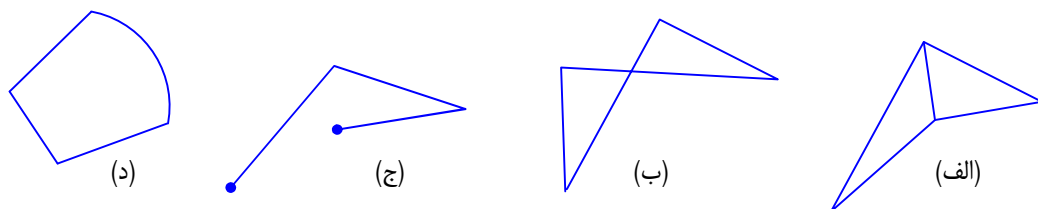
الف: هر پاره خط دقیقاً با دو پاره خط دیگر و فقط در نقاط ابتدا و انتها مشترک باشد.

ب: هر دو پاره خط که در یک انتها مشترک باشند روی یک خط نباشند.

مانند: شکل‌های زیر:



توجه: طبق تعریف هر یک از شکل‌های زیر چند ضلعی نمی‌باشند؛ چرا؟



چند اصطلاح در مورد چند ضلعی‌ها

الف: هر یک از پاره خط‌های تشکیل‌دهنده‌ی یک چند ضلعی را **ضلع** می‌نامند.

ب: هر یک از نقاط ابتدا و انتهای هر ضلع در چند ضلعی را **رأس** می‌نامند.

ج: دو ضلع که در یک رأس مشترک باشند را **دو ضلع مجاور** می‌نامند.

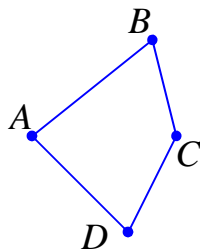
د : هر دو رأس که توسط یک ضلع به هم متصل شده باشند را **رأس های مجاور** می نامند و در غیر این صورت آنها را **غیر مجاور** می گویند.

ه : دو زاویه از یک چند ضلعی که در یک ضلع مشترک باشند را **دو زاویه ی مجاور** می نامند و در غیر این صورت آنها را **غیر مجاور** می گویند.

و : هر پاره خط که دو رأس غیر مجاور از یک چند ضلعی را به هم متصل می کند را **قطر** می گویند.

تمرین ۱ : با توجه به چهار ضلعی زیر به سؤال های داده شده پاسخ دهید.

الف : نام یک ضلع را بنویسید.



ب : دو ضلع مجاور و دو ضلع غیر مجاور بنویسید.

ج : دو رأس مجاور و دو رأس غیر مجاور را نام ببرید.

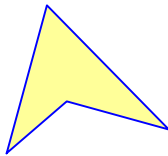
د : دو زاویه ی مجاور و دو زاویه ی غیر مجاور بنویسید.

ه : تمام قطرهای این چهار ضلعی را رسم کنید.

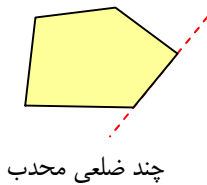
توجه : در نامگذاری چندضلعی ها باید رؤس را هم جهت یا در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت نام

برد و غیر آن نادرست است. برای مثال بگوییم چهارضلعی $ABCD$ و نگوییم چهارضلعی $ACBD$

تمرین ۲ : قطرهای چهارضلعی مقابل را رسم کنید.



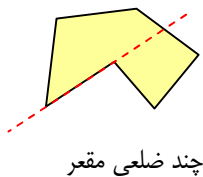
چند ضلعی های محدب و مقعر



چند ضلعی محدب

یک چند ضلعی را محدب گوییم، هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن (امتداد ضلع) ، بقیه ی نقاط چند ضلعی در یک طرف آن خط واقع می شوند.

هر چند ضلعی که محدب نباشد را مقعر می نامند.



چند ضلعی مقعر

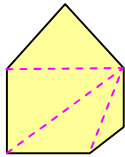
نتیجه : در چند ضلعی محدب ، زاویه ی داخلی بیشتر از 180° درجه وجود ندارد.

تمرین ۳: دو شش ضلعی رسم کنید که یکی محدب باشد و دیگری محدب نباشد.

تمرین ۴: یک چهارضلعی مقعر رسم کنید.

قضیه: تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر $\frac{1}{2}n(n-3)$ است.

اثبات: واضح است که از هر رأس یک n ضلعی محدب به تعداد $n-3$ قطر می‌توان رسم



کرد. پس تعداد کل قطرهای رسم شده، برابر $n(n-3)$ است. اما مشخص است که، در

این محاسبه هر قطر دو بار شمرده می‌شود. بنابراین تعداد واقعی قطرها برابر $\frac{1}{2}n(n-3)$

می‌باشد.

قضیه: مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-2) \times 180^\circ$ درجه است.

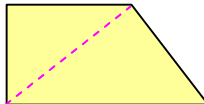
اثبات: واضح است که در هر n ضلعی محدب می‌توان $n-2$ مثلث به دست آورد (چرا؟). از طرفی مجموع

زاویه‌های n ضلعی برابر مجموع زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها است. اما می‌دانیم که مجموع زاویه‌های داخلی

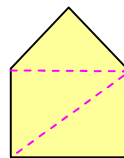
هر مثلث 180° درجه می‌باشد. پس مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی برابر $(n-2) \times 180^\circ$ است.



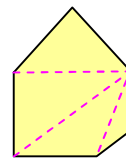
۳ ضلعی



۴ ضلعی



۵ ضلعی



۶ ضلعی

تمرین ۵: مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی یک دوازده ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین ۶: تعداد قطرهای یک ۱۵ ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین ۷: تعداد قطرهای یک چندضلعی محدب دو برابر تعداد اضلاع آن است

الف) تعداد اضلاع را بیابید. ب) مجموع زاویه‌های داخلی آن را پیدا کنید.

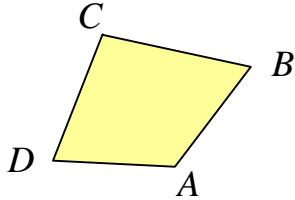
تمرین ۸: مجموع زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی محدب 540° درجه است:

الف) تعداد اضلاع آن را بیابید. ب) تعداد قطرهای آن را محاسبه کنید.

تمرین ۹: ثابت کنید که مجموع زاویه‌های خارجی هر چند ضلعی محدب 360° درجه است.

چهارضلعی های مهم و ویژگی های آنها

در هر چهارضلعی، دو ضلع که در یک رأس مشترک باشند را **مجاور** و در غیر این صورت آنها را **مقابل** می نامند.



برای مثال در چهارضلعی $ABCD$ شکل مقابل ضلع AB و BC

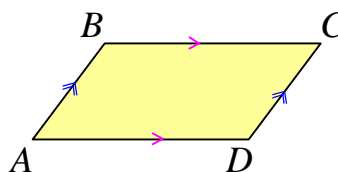
مجاور و دو ضلع AB و CD مقابل می باشند.

در ادامه به معرفی چهار ضلعی های خاص می پردازیم و خواص آنها را

بررسی می کنیم.

الف : متوازی الاضلاع

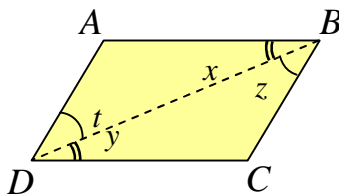
متوازی الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی یکدیگر باشند.



$$AB \parallel CD$$

$$BC \parallel AD$$

قضیه) در هر متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل مساوی یکدیگرند.



$$\text{فرض : } AB \parallel DC \text{ و } AD \parallel BC$$

$$\text{حکم : } AB = DC \text{ و } AD = BC$$

اثبات : یکی از قطرهای متوازی الاضلاع (مثلاً BD) را رسم می کنیم. آنگاه داریم :

$$\left. \begin{array}{l} \angle x = \angle y \\ \text{مشترک } BD = BD \\ \angle z = \angle t \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز}} \Delta(ABD) \cong \Delta(BCD) \rightarrow AB = DC, AD = BC$$

قضیه) اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

$$\parallel \\ \text{فرض : } AB = DC$$

$$\text{حکم : } AD \parallel BC$$

اثبات : یکی از قطرهای چهارضلعی (مثلاً BD) را رسم می کنیم. آنگاه داریم :

$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ AB \parallel AC \rightarrow \angle x = \angle y \text{ و } BD \text{ مورب} \\ DB = BD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABD) \cong \Delta(BCD)$$

$$\rightarrow \angle z = \angle t \rightarrow AD \parallel BC$$

قضیه) اگر در یک چهارضلعی، اضلاع مقابل دو به دو مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

$$\text{فرض: } AB = DC \text{ و } AD = BC \qquad \text{حکم: } AB \parallel DC \text{ و } AD \parallel BC$$

اثبات: یکی از قطرهای چهارضلعی (مثلاً BD) را رسم می‌کنیم. آنگاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طبق فرض } AB = DC \\ \text{مشترک } BD = BD \\ \text{طبق فرض } AD = BC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABD) \cong \Delta(BDC) \rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \hat{y} \rightarrow AB \parallel DC \\ \hat{z} = \hat{t} \rightarrow AD \parallel BC \end{cases}$$

قضیه) در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبرو مساویند.

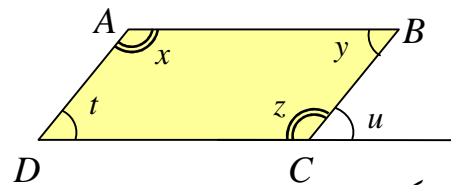
اثبات: یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع (مثلاً BD) را رسم می‌کنیم. آنگاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \\ DB = BD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABD) \cong \Delta(BDC) \rightarrow \angle A = \angle C$$

و به همین ترتیب و با رسم قطر AC ثابت می‌شود که $\angle B = \angle D$

قضیه) اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

اثبات:



$$\text{فرض: } \angle x = \angle z \text{ و } \angle y = \angle t$$

اثبات: می‌دانیم که

$$\angle x + \angle y + \angle z + \angle t = 2 \times 180 = 360$$

همچنین طبق فرض داشتیم که $\angle x = \angle z$ و $\angle y = \angle t$ لذا

$$2\angle x + 2\angle y = 360 \xrightarrow{\div 2} \angle x + \angle y = 180 \quad (۱)$$

حال ضلع BC را از طرف رأس C امتداد می‌دهیم. آنگاه داریم:

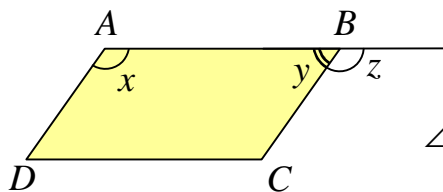
$$\left. \begin{array}{l} \angle x = \angle z \\ \angle z + \angle u = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \angle x + \angle u = 180^\circ \quad (2)$$

اکنون از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم.

$$\rightarrow \angle y = \angle u \rightarrow AB \parallel DC$$

و به همین ترتیب ثابت می شود که $AD \parallel BC$

قضیه در هر متوازی الاضلاع، دو زاویه‌ی مجاور به هر ضلع مکمل یکدیگرند.



اثبات : ضلع AB را از طرف نقطه‌ی B امتداد می دهیم آنگاه

$$\angle z + \angle y = 180^\circ \quad (1)$$

همچنین چون $AD \parallel BC$ و AB مورب می باشد پس

$$\angle x = \angle z \quad (2)$$

و با توجه به نتایج (۱) و (۲) می توان نوشت :

$$\angle x + \angle y = 180^\circ$$

قضیه اگر در یک چهارضلعی زاویه های مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند، آن چهارضلعی

متوازی الاضلاع است.

$$\text{فرض : } \angle x + \angle y = 180^\circ$$

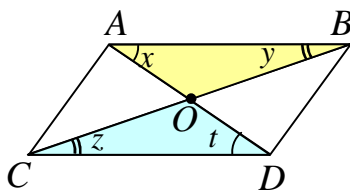
اثبات : ضلع AB را از طرف رأس B امتداد می دهیم، آنگاه داریم.

$$\left. \begin{array}{l} \angle x + \angle y = 180^\circ \\ \angle y + \angle z = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \angle x = \angle z \rightarrow AD \parallel BC$$

و به همین ترتیب ثابت می شود که $AB \parallel DC$

قضیه در هر متوازی الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می کنند.

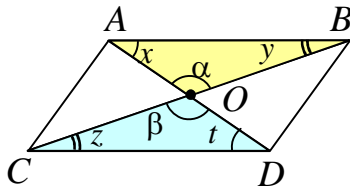
اثبات : قطرهای متوازی الاضلاع را رسم می کنیم آنگاه داریم.



$$\left. \begin{array}{l} \text{مورب } AD \text{ و } AB \parallel DC \rightarrow \angle x = \angle t \\ AB = DC \\ \text{مورب } BC \text{ و } AB \parallel DC \rightarrow \angle y = \angle z \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ز}} \Delta(AOB) \cong \Delta(COD)$$

$$\rightarrow OA = OD, OB = OC$$

قضیه) هر چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند، متوازی‌الاضلاع است.

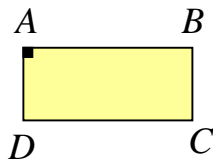


اثبات: قطرهای چهارضلعی را رسم می‌کنیم، آنگاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OD \\ \angle \alpha = \angle \beta \text{ متقابل به رأس} \\ OB = OC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(AOB) \cong \Delta(COD) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle x = \angle t \rightarrow AB \parallel DC \\ AB = DC \end{array} \right.$$

و لذا چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ب: مستطیل



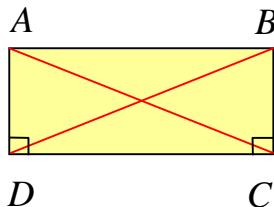
مستطیل چهارضلعی است که تمامی زاویه‌های آن قائمه هستند. به عبارتی دیگر،

مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه قائمه داشته باشد.

نتیجه: بنابر اینکه در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مجاور به هر ضلع مکمل

یکدیگر بوده و زاویه‌های مقابل مساوی می‌باشند. پس هر مستطیل چهار زاویه قائمه دارد.

قضیه) در هر مستطیل قطرها مساوی یکدیگرند.

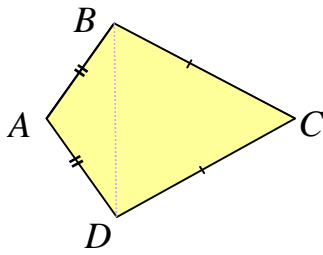


اثبات: قطرهای مستطیل را رسم می‌کنیم آنگاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \angle D = \angle C = 90^\circ \\ DC = DC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ADC) \cong \Delta(BDC) \rightarrow AC = BD$$

پ : کایت

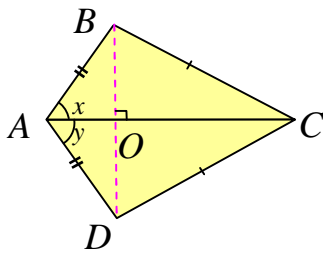
هر چهارضلعی که از دو مثلث متساوی الساقین هم قاعده تشکیل شده باشد را کایت می‌نامند.



$$AB = AD \text{ و } BC = DC$$

قضیه) در هر کایت قطر بزرگ عمودمنصف قطر کوچک است.

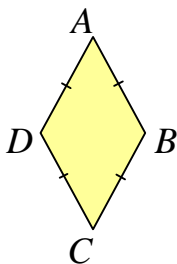
اثبات : قطرهای کایت را رسم می‌کنیم. آنگاه داریم :



$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ AC = AC \\ BC = DC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(ADC) \rightarrow \angle x = \angle y$$

یعنی AC نیمساز زاویه‌ی A است از طرفی می‌دانیم که در هر مثلث متساوی الساقین نیمساز زاویه‌ی رأس بر میانه و ارتفاع وارد بر ضلع مقابل آن منطبق است و لذا AC عمود منصف BD است.

ت : لوزی

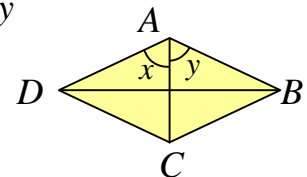


لوزی چهارضلعی است که هر چهارضلع آن هم اندازه باشند. به عبارتی دیگر لوزی، متوازی‌الاضلعی است که اضلاع آن مساویند.

قضیه) در هر لوزی قطرهای عمودمنصف یکدیگرند.

اثبات : قطرهای لوزی را رسم می‌کنیم آنگاه داریم :

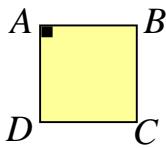
$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ AC = AC \\ BC = DC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(BDC) \rightarrow \angle x = \angle y$$



یعنی AC نیمساز زاویه‌ی A است. از طرفی می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه رأس بر میانه و ارتفاع وارد بر ضلع مقابل آن منطبق می‌باشد. لذا AC عمود منصف BD است. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که BD عمود منصف AC است.

ث : مربع

چهارضلعی است که هر چهارضلع آن هم اندازه و حداقل یک زاویه‌ی آن قائمه باشد. به عبارتی دیگر هر چهار ضلعی که یکی از شرایط زیر را داشته باشد را مربع می‌نامند.



الف: لوزی که یک زاویه قائمه داشته باشد.

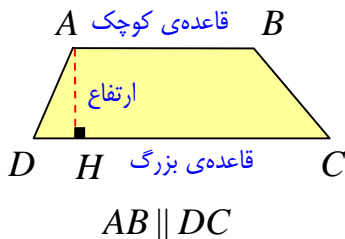
ب: مستطیلی که تمام اضلاع آن مساویند.

نتیجه‌ی ۱ : مربع نوعی مستطیل است و لذا قطرهای آن با هم مساویند.

نتیجه‌ی ۲ : مربع نوعی لوزی است و لذا قطرهای آن عمودمنصف یکدیگر بوده و نیمساز زاویه‌های نظیر نیز می‌باشند.

ج : دوزنقه

دوزنقه چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.



در هر دوزنقه دو ضلع موازی را قاعده و هر یک از دو ضلع غیر موازی را

ساق می‌نامند. پاره‌خطی که بر هر دو قاعده‌ی دوزنقه عمود است را ارتفاع

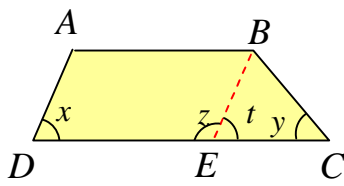
می‌گویند.

دو نوع مهم از انواع دوزنقه ، دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه می‌باشند.

۱ : دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین : دوزنقه‌ای است که دو ضلع ناموازی آن مساویند.

۲ : دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه : دوزنقه‌ای است که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

قضیه) در دوزنقه‌ی متساوی الساقین، دو زاویه‌ی مجاور به هر قاعده مساویند.



اثبات : از رأس B خط BE را موازی AD رسم می‌کنیم تا قاعده‌ی

DC را در نقطه‌ی E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $ABED$

متوازی الاضلاع است، لذا $AD = BE$. از طرفی $AD = BC$ پس

$$BE = BC \text{ و در نتیجه } \angle t = \angle y$$

همچنین چون $AD \parallel BE$ و DC مورب می‌باشد، پس $\angle x = \angle t$ و در نتیجه $\angle x = \angle y$

حال چون $\angle A + \angle D = 180^\circ$ و $\angle B + \angle C = 180^\circ$ پس $\angle A = \angle B$

قضیه) در هر دوزنقه که دو زاویه‌ی مجاور به قاعده مساوی باشند، آن دوزنقه متساوی الساقین است.

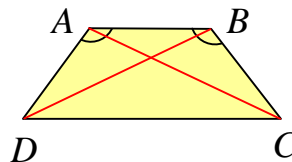
اثبات : فرض کنیم که دو زاویه‌ی C و D مساویند. از رأس B خط BE را موازی AD رسم می‌کنیم تا

قاعده‌ی DC را در نقطه‌ی E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $ABED$ متوازی الاضلاع است. پس

$$\angle t = \angle x \text{ و چون } \angle x = \angle y \text{ لذا } \angle t = \angle y. \text{ در نتیجه } AD = BC$$

قضیه) در دوزنقه‌ی متساوی الساقین دو قطر مساویند.

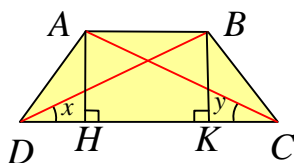
اثبات : با توجه به شکل مقابل داریم :



$$\left. \begin{array}{l} AB = AB \\ \angle A = \angle B \\ AD = BC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABD) \cong \Delta(ABC) \rightarrow AC = BD$$

قضیه) در هر دوزنقه که دو قطر مساوی باشند، آن دوزنقه متساوی الساقین است.

اثبات : ابتدا دو ارتفاع AH و BK را رسم می‌کنیم. چون دو قاعده‌ی AB و DC موازیند، پس



$$AH = BK$$

اکنون ثابت می‌کنیم که دو مثلث ACH و BKD هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} AC = BD \\ AH = BK \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta(ACH) \cong \Delta(BKD) \rightarrow \angle x = \angle y$$

و در نهایت ثابت می‌کنیم که دو مثلث ADC و BCD هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} AC = BD \\ \angle y = \angle x \\ DC = DC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ACD) \cong \Delta(BCD) \rightarrow AD = BC$$

حل چند تمرین :

۱: در کدام n ضلعی تعداد قطرهای و ضلع‌ها برابر است.

حل: طبق مسئله می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}n(n-3) = n$$

و چون تعداد اضلاع عددی صحیح و بزرگتر یا مساوی ۳ می‌باشد. پس دو طرف این تساوی را بر n تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}(n-3) = 1 \xrightarrow{\times 2} n-3 = 2 \rightarrow n = 5$$

۲: در کدام چند ضلعی تعداد قطرهای دو برابر تعداد اضلاع است.

حل: طبق مسئله می‌توان نوشت:

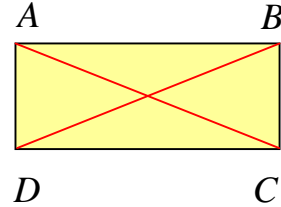
$$\frac{1}{2}n(n-3) = 2n$$

و چون تعداد اضلاع عددی صحیح و بزرگتر یا مساوی ۳ می‌باشد. پس دو طرف این تساوی را بر n تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}(n-3) = 2 \xrightarrow{\times 2} n-3 = 4 \rightarrow n = 7$$

۳: ثابت کنید که اگر در متوازی الاضلاعی قطرها مساوی باشند، آن متوازی الاضلاع، مستطیل است.

اثبات : قطرهای متوازی الاضلاعی را رسم می کنیم آنگاه داریم :



$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ DC = DC \\ AC = BD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ADC) \cong \Delta(BDC) \rightarrow \angle D = \angle C$$

و چون در هر متوازی الاضلاع دو زاویه ی مجاور ، مکمل همدیگر می باشند، پس :

$$\angle D + \angle C = 180 \xrightarrow{\angle D = \angle C} \angle D = \angle C = 90$$

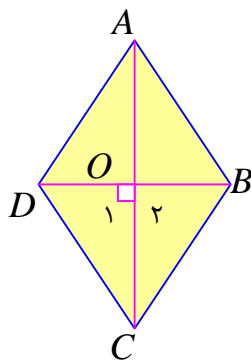
لذا این متوازی الاضلاع زاویه‌ی قائمه دارد، پس مستطیل می باشد.

۴: نشان دهید متوازی الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

حل : کافی است که نشان دهیم ، دو ضلع مجاور این متوازی الاضلاع ، مساویند.

چون در هر متوازی الاضلاع دو قطر منصف یکدیگر می باشند، پس :

$$DO = BO$$

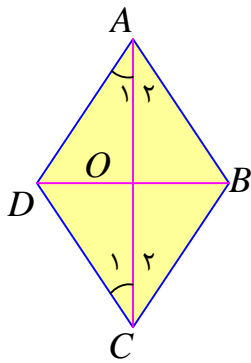


لذا می توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} DO = BO \\ \angle O_1 = \angle O_2 \\ OC = OC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(DOC) \cong \Delta(BOC) \rightarrow DC = BC$$

۵: نشان دهید متوازی الاضلاعی که در آن حداقل یک قطر نیمساز یک زاویه‌ی آن باشد، لوزی است.

حل : کافی است که نشان دهیم ، دو ضلع مجاور این متوازی الاضلاع ، مساویند.



چون در هر متوازی الاضلاع دو قطر منصف یکدیگر می باشند، پس :

$$AO = CO$$

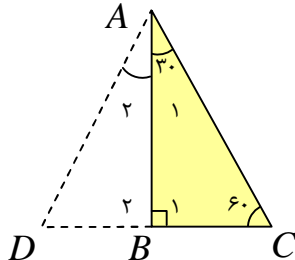
از طرفی چون در هر متوازی الاضلاع دو زاویه ی مقابل مساوی یکدیگر می باشند، پس نیمساز هر زاویه ، نیمساز زاویه ی مقابل آن نیز می باشد. لذا :

$$\angle A_1 = \angle C_1$$

لذا می توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} AO = CO \\ \angle A_1 = \angle C_1 \\ DO = DO \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(AOD) \cong \Delta(COD) \rightarrow AD = CD$$

۶: ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.



حل : ضلع BC روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه به اندازه‌ی خودش از طرف نقطه‌ی B امتداد می دهیم تا نقطه‌ی D بدست آید. سپس نقطه‌ی D را به A وصل می کنیم. در این صورت دو مثلث ABC و ABD به دست می آید.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AB \\ \angle B_1 = \angle B_2 = 90^\circ \\ BC = BD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(ABD) \rightarrow \begin{cases} \angle A_1 = \angle A_2 = 30^\circ \\ \angle D = \angle C = 60^\circ \end{cases}$$

و لذا در مثلث ACD زاویه‌ی DAC برابر ۶۰ درجه است، و چون دو زاویه ی دیگر این مثلث برابر ۶۰ درجه هستند، لذا این مثلث متساوی الاضلاع می باشند. در نتیجه :

$$DC = AC$$

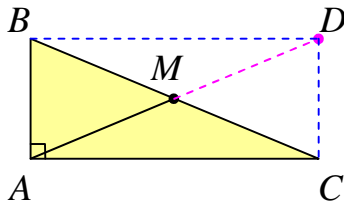
لذا خواهیم داشت:

$$2BC = AC$$

یعنی :

$$BC = \frac{AC}{2}$$

۷ : ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.



اثبات : میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش از طرف نقطه‌ی M

امتداد می دهیم. تا نقطه‌ی D به دست آید. نقطه‌ی D را به

نقاط B و C وصل می کنیم. چون دو قطر چهارضلعی $ABDC$

مساویند، پس این چهارضلعی متوازی الاضلاع می باشد و چون

دارای زاویه‌ی قائمه است، پس مستطیل است. در مستطیل قطرها مساویند. لذا خواهیم داشت:

$$AD = BC$$

لذا خواهیم داشت:

$$2AM = BC$$

یعنی :

$$AM = \frac{BC}{2}$$

۸ : به کمک تمرین قبل ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه ضلع روبرو به زاویه‌ی 30° درجه نصف وتر

است.

حل : چون در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC زاویه‌ی A برابر 30° درجه است، لذا باید

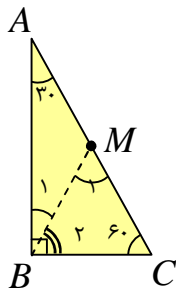
زاویه‌ی B برابر 60° درجه باشد. حال اگر میانه‌ی وارد بر وتر یعنی BM را رسم

کنیم. طبق تمرین قبل $BM = AM = MC$ است. پس مثلث AMB

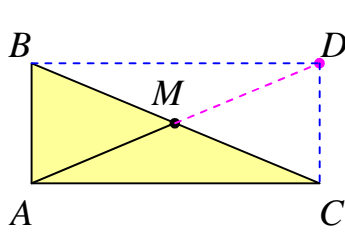
متساوی الساقین بوده و $\angle B_1 = 30^\circ$. از اینجا نیز معلوم می شود $\angle B_2 = 60^\circ$

لذا در مثلث BMC خواهیم داشت $\angle M_1 = 60^\circ$. در نتیجه مثلث BMC

متساوی الاضلاع است و $BC = BM$. و در نهایت خواهیم داشت $BC = \frac{AC}{2}$



۹: ثابت کنید که اگر در مثلثی، اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر یک ضلع، نصف اندازه‌ی آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.



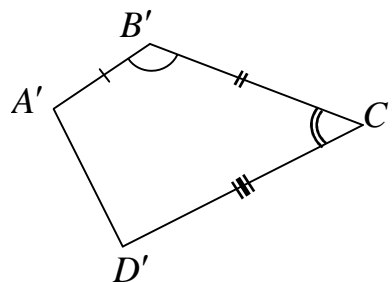
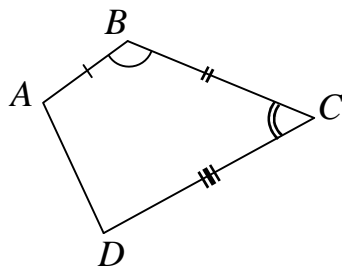
اثبات: میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش از طرف نقطه‌ی M امتداد می‌دهیم. تا نقطه‌ی D به دست آید. نقطه‌ی D را به نقاط B و C وصل می‌کنیم. چون $AM = \frac{BC}{2}$ و

$AM = MD$ پس $AM = \frac{AD}{2}$. لذا $AD = BC$ ، یعنی دو قطر چهارضلعی $ABDC$ مساویند، پس

این چهارضلعی مستطیل است. در نتیجه مثلث ABC قائم الزاویه و زاویه‌ی BAC قائمه است.

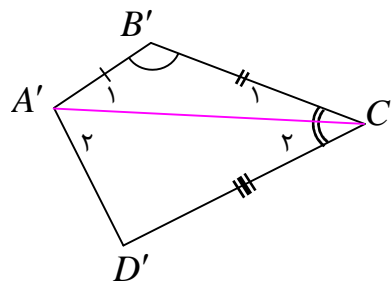
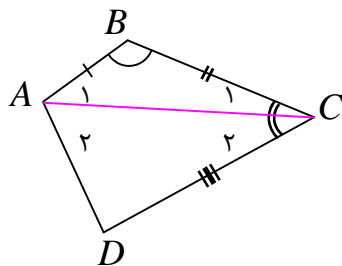
۱۰: در دو چهارضلعی مقابل داریم:

$$AB = A'B' \text{ و } \angle B = \angle B' \text{ و } BC = B'C' \text{ و } \angle C = \angle C' \text{ و } CD = C'D'$$



چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

حل: ابتدا قطرهای AC و $A'C'$ را رسم می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:



$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \angle B = \angle B' \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(A'B'C') \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AC = A'C' \\ \angle A_1 = \angle A'_1 \\ \angle C_1 = \angle C'_1 \end{array} \right.$$

و چون $\angle C = \angle C'$ لذا نتیجه می شود. $\angle C_1 = \angle C'_1$

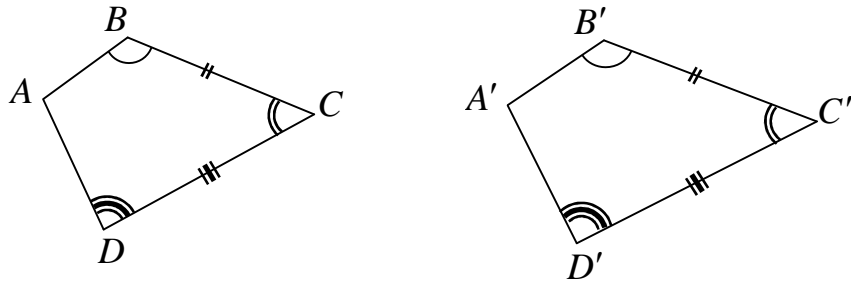
$$\left. \begin{array}{l} AC = A'C' \\ \angle C_1 = \angle C'_1 \\ DC = D'C' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ADC) \cong \Delta(A'D'C') \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AD = A'D' \\ \angle A_2 = \angle A'_2 \\ \angle D = \angle D' \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A'_1 \\ \angle A_2 = \angle A'_2 \end{array} \right\} \rightarrow \angle A_1 + \angle A_2 = \angle A'_1 + \angle A'_2 \rightarrow \angle A = \angle A'$$

در نتیجه اندازه های سایر ضلع ها و زاویه های متناظر مساوی است.

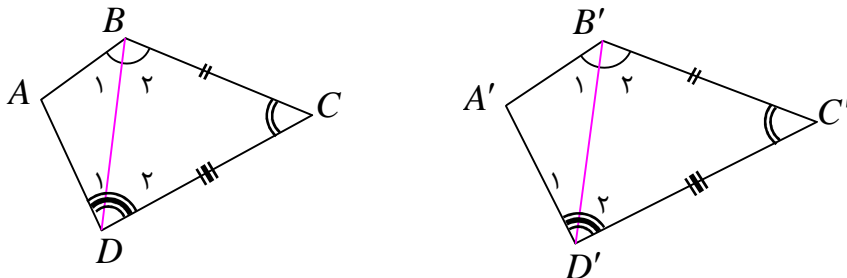
۱۱: در دو چهارضلعی مقابل داریم:

$$\angle B = \angle B' \text{ و } BC = B'C' \text{ و } \angle C = \angle C' \text{ و } CD = C'D' \text{ و } \angle D = \angle D'$$



چگونه مساوی بودن اندازه های سایر ضلع ها و زاویه ها را نتیجه می گیرید؟

حل : ابتدا قطرهای BD و $B'D'$ را رسم می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:



$$\left. \begin{array}{l} BC = B'C' \\ DC = D'C' \\ \angle C = \angle C' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(BDC) \cong \Delta(B'D'C') \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BD = B'D' \\ \angle B_2 = \angle B'_2 \\ \angle D_2 = \angle D'_2 \end{array} \right.$$

و چون $\angle B = \angle B'$ لذا نتیجه می‌شود. $\angle B_1 = \angle B'_1$

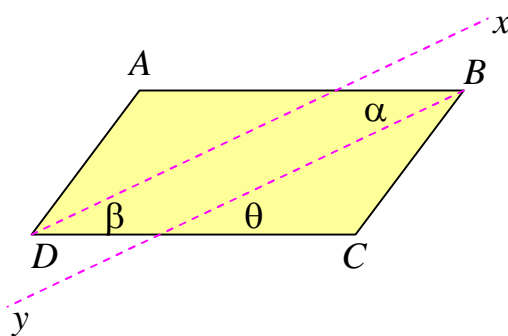
همچنین چون $\angle D = \angle D'$ باز نتیجه می‌شود. $\angle D_1 = \angle D'_1$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B_1 = \angle B'_1 \\ BD = B'D' \\ \angle D_1 = \angle D'_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{زضز}} \Delta(ABD) \cong \Delta(A'B'D') \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ AB = A'B' \\ AD = A'D' \end{array} \right.$$

در نتیجه اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر مساوی است.

۱۲: ثابت کنید که در هر متوازی‌الاضلاع نیمسازهای دو زاویه‌ی مقابل موازی یکدیگرند.

حکم: $By \parallel Dx$



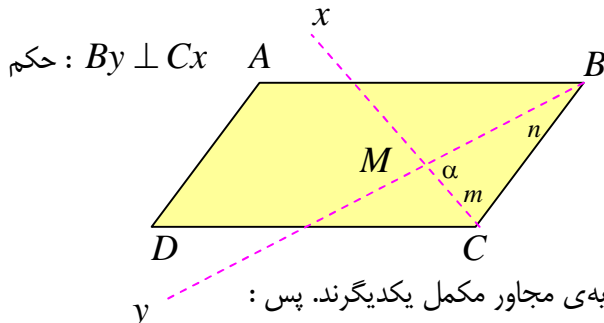
اثبات: می‌دانیم که در هر متوازی‌الاضلاع دو

زاویه‌ی مقابل مساوی یکدیگرند. پس:

$$\angle D = \angle B \xrightarrow{\div 2} \frac{\angle D}{2} = \frac{\angle B}{2} \rightarrow \angle \beta = \angle \alpha$$

$$\xrightarrow{AB \parallel DC \rightarrow \angle \alpha = \angle \theta} \angle \beta = \angle \theta \rightarrow Dx \parallel By$$

۱۳: ثابت کنید که در هر متوازی‌الاضلاع نیمسازهای دو زاویه‌ی مجاور، بر یکدیگر عمودند.



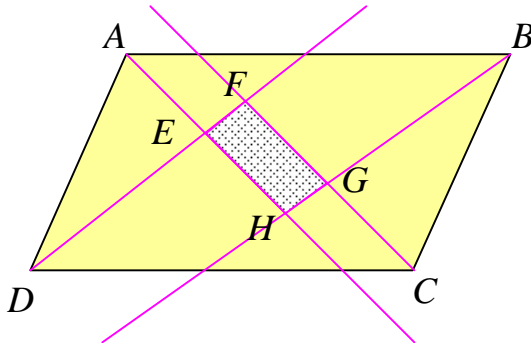
اثبات: می‌دانیم که در هر متوازی‌الاضلاع دو زاویه‌ی مجاور مکمل یکدیگرند. پس:

$$\angle B + \angle C = 180^\circ \xrightarrow{\div 2} \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = \frac{180}{2} \rightarrow \angle n + \angle m = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\angle \alpha + \angle n + \angle m = 180^\circ} \angle \alpha = 90^\circ \rightarrow By \perp Cx$$

۱۴: ثابت کنید که شکل حاصل از برخورد نیمساز های زاویه های داخلی یک متوازی الاضلاع ، یک

مستطیل است.



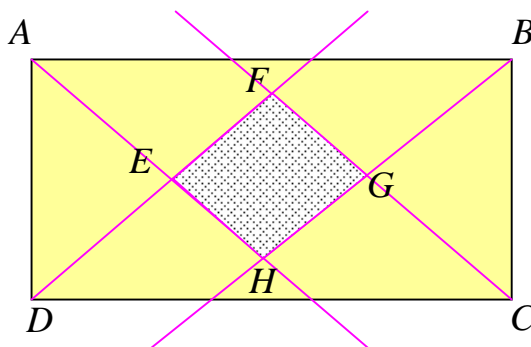
اثبات : طبق تمرین های قبیل ، هر دو ضلع مقابل

چهار ضلعی $EFGH$ موازی یکدیگر بوده و هر دو

ضلع مجاور بر هم عمودند. لذا چهار ضلعی حاصل

مستطیل است.

۱۵: ثابت کنید که شکل حاصل از برخورد نیمساز های زاویه های داخلی یک مستطیل ، یک مربع است.



اثبات : بنابر تمرین قبل چهارضلعی $EFGH$

مستطیل است. حال کافی است ثابت کنیم که

در این مستطیل دو ضلع مجاور مساویند.

چون دو مثلث BCG و ADE به حالت

تساوی دو زاویه و ضلع بین همنهشت هستند،

پس: $DE = CG$. از طرفی مثلث DCF به علت تساوی دو زاویه‌ی مجاور به قاعده ، متساوی الساقین

است، پس: $DF = CF$

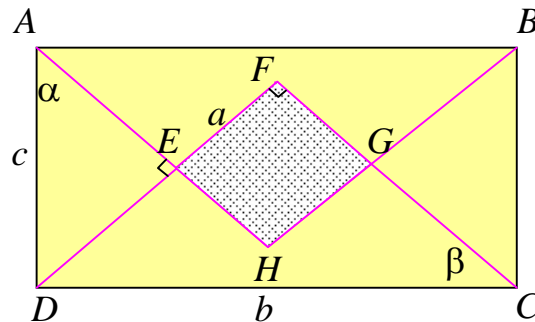
اکنون اگر تساوی های فوق را از هم کم کنیم، خواهیم داشت :

$$DF - DE = CF - CG \rightarrow EF = GF$$

یعنی در مستطیل $EFGH$ دو ضلع مجاور مساویند، لذا این چهار ضلعی مربع است.

۱۶: با توجه به تمرین قبل رابطه‌ی بین طول و عرض مستطیل و اندازه‌ی ضلع مربع را بیابید.

حل : گیریم که اندازه‌ی ضلع مربع a و اندازه‌ی طول و عرض مستطیل به ترتیب b و c باشند. در این صورت چون زاویه‌های α و β برابر 45° درجه هستند، پس می‌توان نوشت:



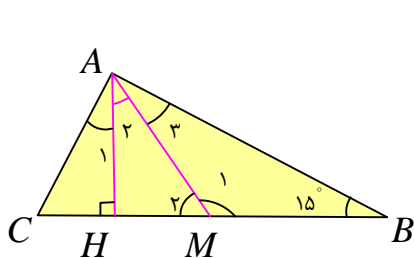
$$\begin{aligned} \Delta ADE : \sin \alpha &= \frac{DE}{AD} \xrightarrow{\angle \alpha = 45^\circ} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{DE}{c} \rightarrow DE = \frac{\sqrt{2}}{2} c \\ \Delta CDF : \sin \beta &= \frac{DF}{DC} \xrightarrow{\angle \beta = 45^\circ} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{DF}{b} \rightarrow DF = \frac{\sqrt{2}}{2} b \\ EF = DF - DE &\rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} b - \frac{\sqrt{2}}{2} c = \frac{\sqrt{2}}{2} (b - c) \end{aligned}$$

۱۷ : طول یک مستطیل ۵ و عرض آن ۳ می‌باشد، طول ضلع مربع حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن را بیابید.

حل :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} (b - c) = \frac{\sqrt{2}}{2} (5 - 3) = \sqrt{2}$$

۱۸ : در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ، اندازه‌ی زاویه‌ی B برابر 15° درجه است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر



وتر نشان دهید، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه‌ی وتر است.
حل : در مثلث ABC ، چون زاویه‌ی C برابر 75° درجه می‌باشد. پس در مثلث ACH ، اندازه‌ی زاویه‌ی A_1 برابر 15° درجه

می باشد.

$$\angle A_1 = 15^\circ$$

در مثلث AMB ، چون $AM = MB$ می توان نتیجه گرفت:

$$\angle A_3 = \angle B = 15^\circ$$

و چون زاویه‌ی BAC قائمه است. پس :

$$\angle A_2 = 90 - (\angle A_1 + \angle A_3) = 90 - (15 + 15) = 60^\circ$$

لذا در مثلث AMH اندازه‌ی زاویه‌ی M_2 برابر 30 درجه می باشد. پس :

$$AH = \frac{1}{2} AM$$

در مثلث ABC پاره خط AM میانه‌ی وارد بر وتر است . لذا

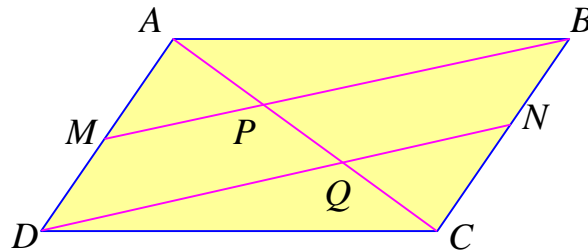
$$AM = \frac{1}{2} BC$$

در نهایت خواهیم داشت:

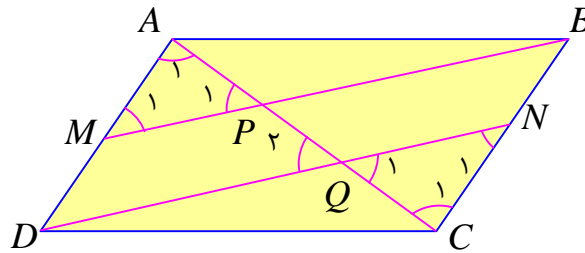
$$AH = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} BC \right) = \frac{1}{4} BC$$

۱۹ : در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، نقاط M و N به ترتیب وسط های ضلع های AD و BC می

باشند. چرا خط های DN و MB موازیند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$



حل : چون $AD \parallel BC$ و قطر AC مورب است. لذا: $\angle A_1 = \angle C_1$



$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ \angle A = \angle C \\ AM = CN \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(AMB) \cong \Delta(DCN) \rightarrow \angle N_1 = \angle M_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle C_1 \\ AM = CN \\ \angle M_1 = \angle N_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(PAM) \cong \Delta(QCN) \rightarrow \begin{cases} AP = QC \\ \angle P_1 = \angle Q_1 \end{cases} \quad (1)$$

و چون $\angle Q_1$ و $\angle Q_2$ متقابل به رأس هستند. پس $\angle Q_1 = \angle Q_2$ و لذا $\angle P_1 = \angle Q_2$

پس نتیجه گرفته می شود که $MB \parallel DN$

اکنون قضیه‌ی تالس را در مثلث ADQ می نویسیم.

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PQ} \xrightarrow{AM=MD} \frac{AP}{PQ} = 1 \rightarrow AP = PQ \quad (2)$$

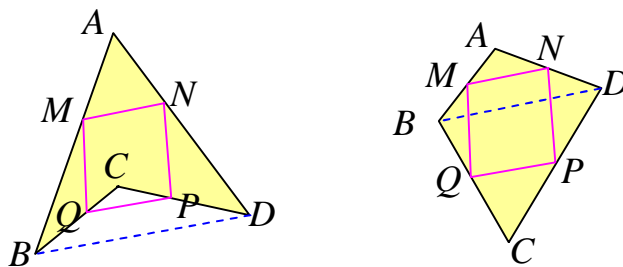
و در نهایت به نتایج (۱) و (۲) خواهیم داشت.

$$AP = PQ = QC$$

۲۰: ثابت کنید، اگر وسط های هر چهار ضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم. یک متوازی

الاضلاع پدید می آید.

حل :



در مثلث ABD نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و AD می باشند. لذا :

$$MN \parallel BD \quad \text{و} \quad MN = \frac{1}{2}BD$$

در مثلث BCD نقاط P و Q به ترتیب وسط اضلاع BC و CD می باشند. لذا :

$$PQ \parallel BD \quad \text{و} \quad PQ = \frac{1}{2}BD$$

در نتیجه دو ضلع مقابل چهارضلعی $MNPQ$ موازی و مساویند. پس متوازی الاضلاع است.

۲۱: با توجه به تمرین ۲۰، این چهارضلعی باید چه ویژگی ای داشته باشد تا این متوازی الاضلاع مستطیل

یا لوزی شود؟

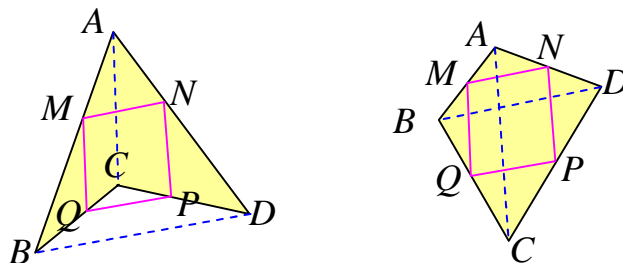
حل : اگر قطرها بر هم عمود باشند، متوازی الاضلاع به دست آمده لوزی است و اگر قطرها با هم برابر باشند.

متوازی الاضلاع مستطیل است.

۲۲: با توجه به تمرین ۲۰، چه رابطه ای بین محیط متوازی الاضلاع پدید آمده با اندازه های قطرهای

چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

حل : با توجه به قضیه‌ی تالس، تناسب های زیر را می نویسیم.



در مثلث ABD داریم:

$$MN = \frac{1}{2}BD$$

و چون چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است. لذا $PQ = \frac{1}{2}BD$

در مثلث ABC داریم: لذا :

$$MQ = \frac{1}{2}AC$$

و چون چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است. لذا $NP = \frac{1}{2}AC$

اکنون محیط چهارضلعی $MNPQ$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

$$P_{MNPQ} = MN + NP + PQ + MQ$$

$$= \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(BD + AC + BD + AC)$$

$$= BC + AD$$

یعنی محیط متوازی الاضلاع بدست آمده نصف حاصل جمع اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه است.

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

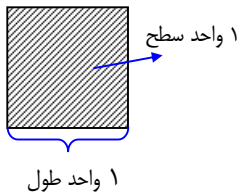
فصل سوم

درس دوم : مساحت و کاربردهای آن

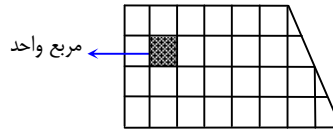
مفهوم مساحت یک چندضلعی یکی از مفاهیم اساسی و مهم در هندسه محسوب می شود. در این درس مفهوم مساحت را به همراه کاربرد هایی از آن را بیان می کنیم.

☑ سطح و واحد آن

تعریف : هر مربع که اندازه ی طول ضلع آن یک واحد طول باشد را مربع واحد (واحد سطح) می نامند.



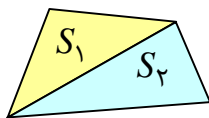
معمولاً مساحت هر شکل با تقسیم آن به تعدادی مربع واحد اندازه گیری می شود. به عبارت دیگر مساحت یک ناحیه، مقدار فضایی از صفحه است که آن ناحیه اشغال می کند.



☑ اصول مساحت

۱ : مساحت هر شکل در صفحه، یک عدد حقیقی مثبت است.

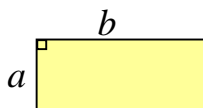
۲ : اگر یک شکل از بخش های مجزایی تشکیل شده باشد، مساحت آن برابر مجموع مساحت های آن بخش ها است. (اصل مجموع مساحت ها)



$$S_t = S_1 + S_2$$

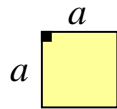
۳ : شکل های همنهشت مساحت های مساوی دارند.

۴ : مساحت مستطیل برابر حاصل ضرب طول در عرض آن است.



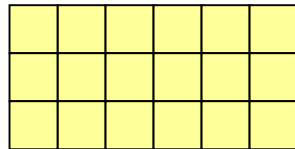
$$S = a.b$$

نتیجه: مساحت هر مربع برابر مجذور اندازه یک ضلع آن است.

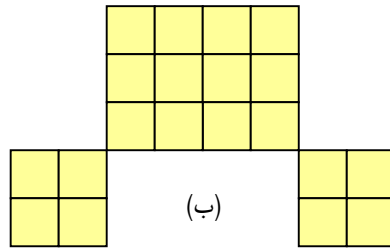


$$S = a^2$$

تمرین ۱: در هر مورد مساحت قسمت رنگی را حساب کنید. (هر مربع یک مربع واحد است).



(الف)



(ب)

تمرین ۲: مساحت مستطیلی به عرض ۹ برابر مساحت مربعی به ضلع ۱۲ است. طول مستطیل را بیابید.

حل: اگر طول مستطیل x باشد. در این صورت داریم.

مساحت مربع = مساحت مستطیل

$$9x = (12)^2$$

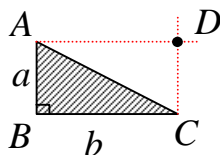
$$\rightarrow 9x = 144 \rightarrow x = 16$$

☑ مساحت اشکال هندسی مهم

در ادامه قضایای مربوط به مساحت شکل های مهم هندسی را مطرح می کنیم.

قضیه مساحت مثلث قائم الزاویه برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع زاویه ی قائمه آن است.

اثبات: ابتدا از رأس A خطی موازی ضلع BC و از رأس C خطی موازی



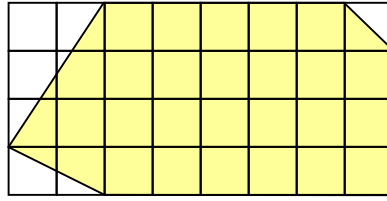
ضلع AB رسم می کنیم واضح است که چهارضلعی حاصل مستطیل است و از

دو مثلث همنهشت و مجزای ABC و ADC تشکیل شده است لذا:

$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ AC = AC \\ BC = AD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(BDC) \rightarrow S(ABC) = S(ADC)$$

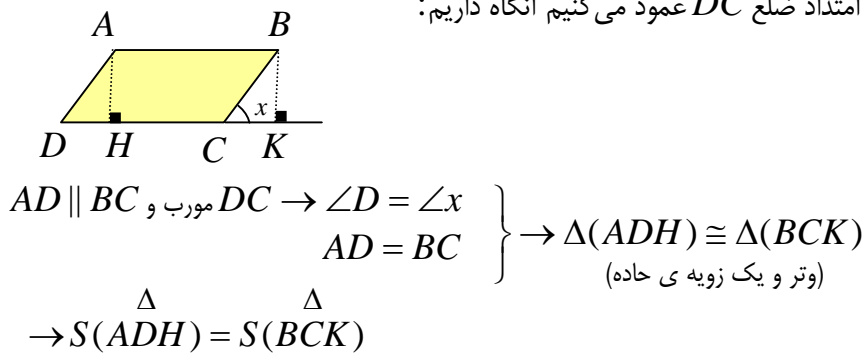
$$S(ABC) = \frac{1}{2} \times \text{مساحت مستطیل} = \frac{1}{2} a.b$$

تمرین ۳: مساحت قسمت رنگی را حساب کنید. (هر مربع یک مربع واحد است).



قضیه) مساحت هر متوازی الاضلاع ، با حاصل ضرب اندازه ی قاعده در ارتفاع نظیر آن برابر است.

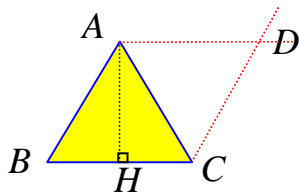
اثبات : از رأس B خطی بر امتداد ضلع DC عمود می کنیم آنگاه داریم:



از طرفی

$$\begin{aligned} \text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD &= \text{مساحت مثلث } ADH + \text{مساحت چهارضلعی } ABCH \\ &= \text{مساحت مثلث } BCK + \text{مساحت چهارضلعی } ABCH \\ &= \text{مساحت مستطیل } ABKH = AB \cdot AH = AH \cdot DC \end{aligned}$$

قضیه) مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده ی نظیر آن است.



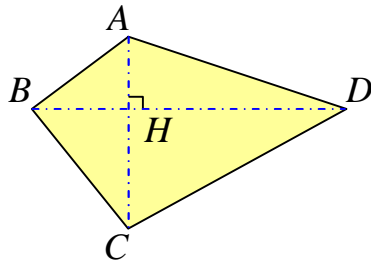
اثبات : از رأس A خطی موازی ضلع BC و از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می کنیم. پس چهارضلعی حاصل متوازی الاضلاع است و از دو مثلث همنهشت و مجزا تشکیل شده است.

$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ AC = AC \\ BC = AD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(BDC) \rightarrow S(ABC) = S(ADC)$$

لذا :

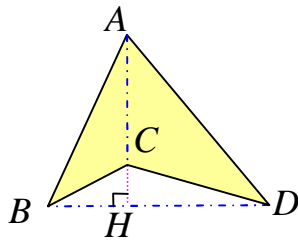
$$\begin{aligned} \text{نصف مساحت متوازی الاضلاع} &= \text{مساحت مثلث } ABC \\ \rightarrow S(ABC) &= \frac{1}{2} AH \times BC \end{aligned}$$

قضیه) اگر در یک چهارضلعی دو قطر بر هم عمود باشند، مساحت آن چهارضلعی برابر نصف حاصل ضرب قطرها ی آن است.



اثبات : با توجه به شکل های مقابل می توان نوشت:

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(ABD) + S(CBD) \\ &= \frac{1}{2} AH \cdot BD + \frac{1}{2} HC \cdot BD \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot \underbrace{(AH + HC)}_{AC} = \frac{1}{2} BD \times AC \end{aligned}$$



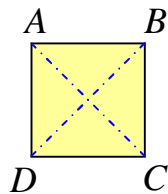
$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(ABD) - S(CBD) \\ &= \frac{1}{2} AH \cdot BD - \frac{1}{2} HC \cdot BD \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot \underbrace{(AH - HC)}_{AC} = \frac{1}{2} BD \times AC \end{aligned}$$

نتیجه :

(۱) چون قطرهای لوزی بر هم عمودند، لذا مساحت آن با نصف حاصل ضرب قطرهای آن برابر است.

(۲) چون قطرهای کایت بر هم عمودند، لذا مساحت آن با نصف حاصل ضرب قطرهای آن برابر است

(۳) مساحت هر مربع با نصف مجذور اندازه ی قطر آن برابر است.



$$AC = BD = r$$

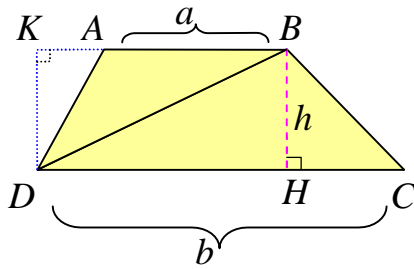
$$AC \perp BD \rightarrow S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \rightarrow S = \frac{1}{2} r \cdot r = \frac{1}{2} r^2$$

قضیه) مساحت ذوزنقه برابر نصف حاصل ضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع آن برابر است.

اثبات : چون $AB \parallel DC$ پس بدیهی است که $DK = BH = h$

همچنین :

$$S(ABCD) = S(ABD) + S(BDC)$$



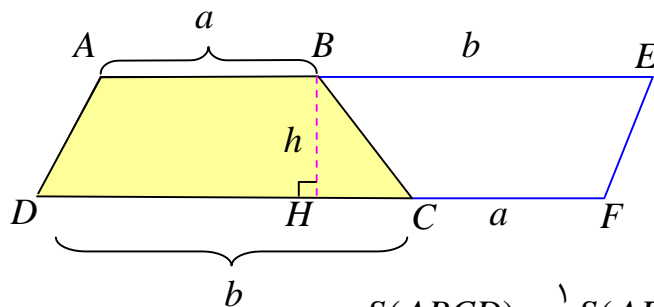
$$= \frac{1}{2} DK \cdot AB + \frac{1}{2} BH \cdot DC$$

$$= \frac{1}{2} h \cdot a + \frac{1}{2} h \cdot b$$

$$= \frac{1}{2} (a + b) h$$

روش دوم : قاعده ی AB را از طرف نقطه ی B به اندازه ی DC و قاعده ی DC را از طرف نقطه ی C به اندازه ی AB امتداد می دهیم. بدیهی است که در چهار ضلعی بدست آمده دو ضلع مقابل موازی و مساویند.

پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع می باشد و مساحت ذوزنقه نصف مساحت آن است. لذا :

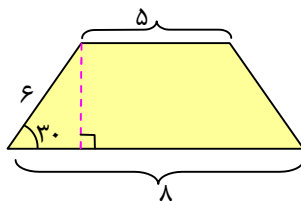


$$S(ABCD) = \frac{1}{2} S(AEFD)$$

$$S = \frac{1}{2} (a + b) h$$

تمرین برای حل :

۴ : مساحت ذوزنقه ی شکل مقابل را حساب کنید.

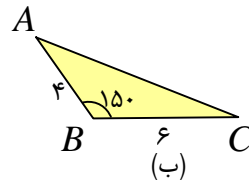
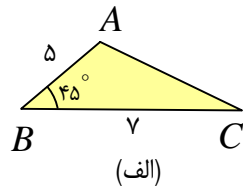


۵ : ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر برابر است.

۶ : ثابت کنید که مساحت هر متوازی‌الاضلاع با حاصل ضرب هر دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع برابر است.

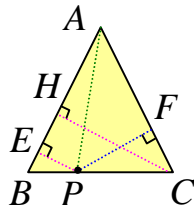
۷ : ثابت کنید که مساحت هر مثلث با نصف حاصل ضرب هر دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع برابر است.

۸ : مساحت مثلث‌های زیر را حساب کنید. (سینوس زاویه‌ها را در صورت لزوم به کمک ماشین حساب به دست آورید.)



۹ : مساحت مربعی را حساب کنید که طول قطر آن $2\sqrt{7}$ باشد.

۱۰ : ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده‌ی یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن با ارتفاع وارد بر یک ساق آن برابر است.^۱



$$PE + PF = CH$$

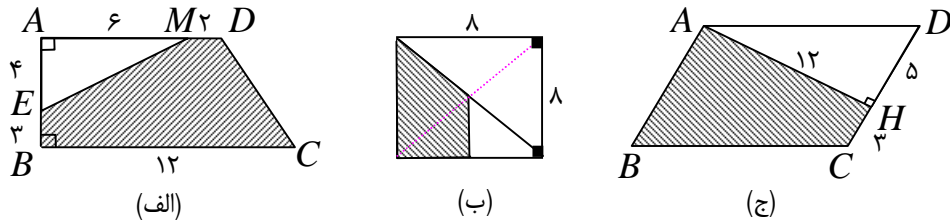
۱۱ : ثابت کنید که (قدر مطلق) تفاضل فواصل هر نقطه واقع بر امتداد قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن مثلث مقداری ثابت بوده و برابر ارتفاع وارد بر ساق‌ها است.

۱۲ : مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی الساقین ۴۰ است، اندازه‌ی هر کدام از ساق‌ها را پیدا کنید.

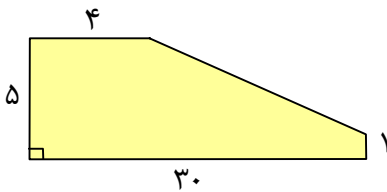
۱۳ : مساحت مربعی به قطر $6\sqrt{2}$ با مساحت مستطیلی به طول ۹ برابر است. اندازه‌ی عرض مستطیل را بدست آورید.

^۱ . در هر مثلث متساوی الساقین، دو ارتفاع وارد بر ساق‌ها ، مساویند.

۱۴: در هر مورد مساحت قسمت رنگی را به دست آورید. (چهارضلعی های اصلی به ترتیب ذوزنقه ، مربع و متوازی الاضلاع هستند).

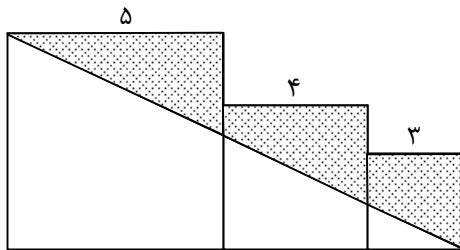


۱۵: مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



۱۶: با توجه به شکل مقابل مساحت قسمت رنگی را به

دست آورید. (هر سه چهارضلعی مربع هستند).

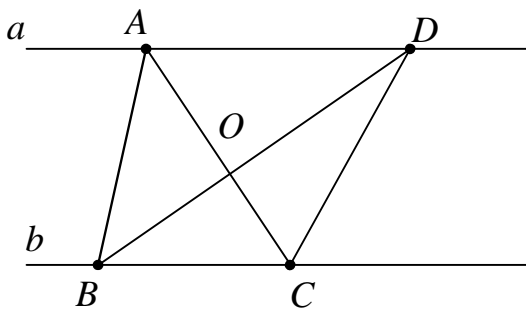


۱۷: در یک لوزی اندازه ی هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا

کنید.

۱۸: در شکل مقابل $a \parallel b$ ، نشان دهید که دو مثلث AOB و COD مساحت مساوی دارند. (مسئله ی

پروانه)



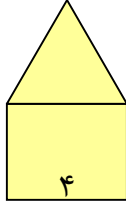
☑ مفهوم محیط

اندازه‌ی طولی مرز یا کناره‌ی یک شکل ساده‌ی بسته را محیط آن شکل می‌نامند.

نتیجه: محیط یک چند ضلعی محدب برابر مجموع اندازه‌های اضلاع آن است.

مثال: شکل مقابل از یک مربع و یک مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است. محیط

آن را محاسبه کنید.

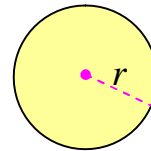


☑ مساحت و محیط دایره

مساحت و محیط هر دایره به شعاع r را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$S = \pi r^2 \text{ مساحت}$$

$$P = 2\pi r \text{ محیط}$$



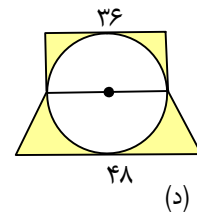
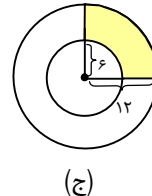
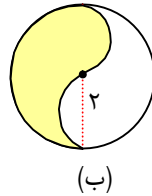
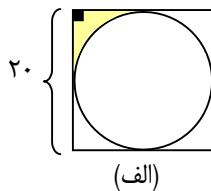
این دو رابطه را اینجا بدون اثبات می‌پذیریم.

تمرین برای حل:

۱۹: مساحت و محیط دایره‌ای را حساب کنید که اندازه‌ی قطر آن ۱۰ سانتی‌متر باشد.

۲۰: با توجه به شکل‌های زیر در هر مورد مساحت قسمت رنگی را به دست آورید. (در مورد «الف» چهارضلعی

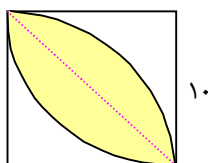
مربع و در مورد «د» چهارضلعی‌ها مستطیل و دوزنقه می‌باشند).



۲۱: مربع شکل مقابل را در نظر بگیرید.

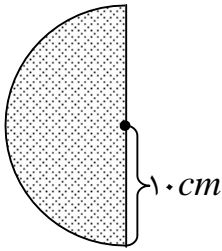
الف: مساحت گلبرگ را حساب کنید.

ب: ثابت کنید که مساحت گلبرگ ۵۷ درصد مساحت مربع است.



۲۲: ضلع مربعی ۲۰ سانتی متر است. مساحت گلبرگ را بدست آورید.

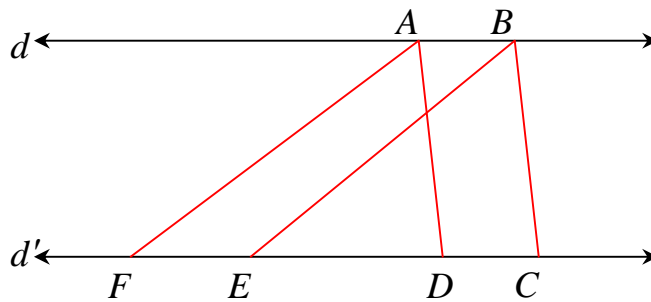
۲۳: مساحت و محیط نیم دایره ی مقابل را حساب کنید.



حل چند تمرین :

۲۴: در شکل مقابل دو خط d و d' موازی اند و $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی الاضلاع اند. ثابت

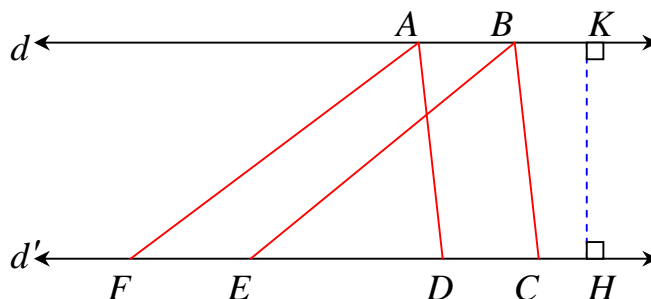
کنید که این دو چهارضلعی مساحت های برابر دارند.



حل : چون دو چهارضلعی $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی الاضلاع اند، پس می توان نوشت :

$$AB = DC \text{ و } AB = EF$$

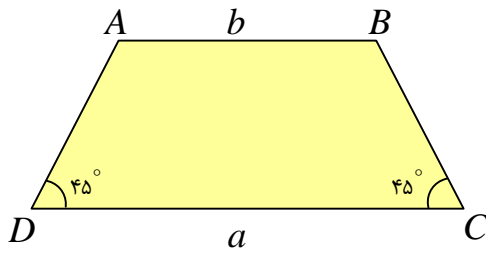
لذا $DC = EF$ ، یعنی قاعده های این دو متوازی الاضلاع هم اندازه اند.



از طرفی چون دو خط d و d' موازی اند، لذا این دو متوازی الاضلاع ارتفاع مشترک دارند. پس :

$$S(ABEF) = EF \times KH = AB \times KH = S(ABCD)$$

۲۵: مساحت ذوزنقهی شکل مقابل را حساب کنید.



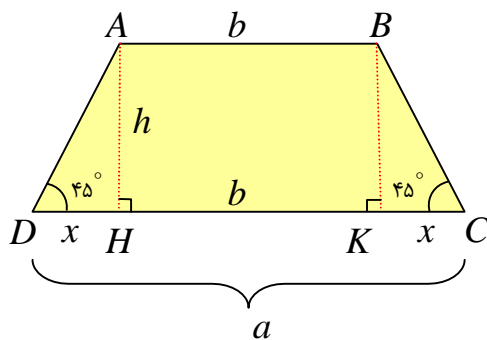
حل: ارتفاع های AH و BK را رسم می کنیم.

دو مثلث قائم الزاویه ی BCK و ADH به حالت تساوی وتر و یک ضلع همنهشت هستند. لذا:

$$DH = CK = x$$

چهارضلعی $ABKH$ مستطیل است. لذا:

$$KH = b$$



پس می توان نوشت:

$$DC = DH + KH + KC \rightarrow a = x + b + x \rightarrow a = b + 2x$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2}(a - b)$$

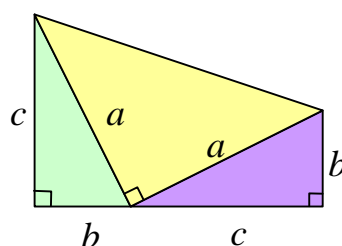
از طرفی در مثلث ADH داریم:

$$\tan(45) = \frac{h}{x} \rightarrow 1 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x$$

در نهایت مساحت ذوزنقه را به شکل زیر به دست می آوریم:

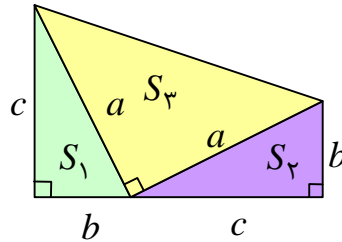
$$S = \frac{1}{2}(a + b)h \rightarrow \frac{1}{2}(a + b) \times \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$$

۲۶: به کمک مساحت ذوزنقهی شکل مقابل، قضیه ی فیثاغورس را ثابت کنید.



حل : بدیهی است که مساحت دوزنقه با مجموع مساحت های مثلث های تشکیل دهنده ی آن برابر است.

پس:



$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a.a = bc + \frac{1}{2}a^2$$

همچنین واضح است که قاعده های دوزنقه b و c و ارتفاع آن $b + c$ است. پس :

$$S = \frac{1}{2}(b + c)(b + c)$$

این دو نتیجه باید مساوی باشند. لذا :

$$\frac{1}{2}(b + c)(b + c) = bc + \frac{1}{2}a^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(b^2 + 2bc + c^2) = bc + \frac{1}{2}a^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}b^2 + bc + \frac{1}{2}c^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 \xrightarrow{\times 2} b^2 + c^2 = a^2$$

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

درس سوم: کاربردهای مساحت آن

در ادامه کاربردهایی از مفهوم مساحت را بیان می‌کنیم.

☑ مساحت مثلث متساوی الاضلاع

یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a ، را در نظر بگیرید. در این صورت

الف: ثابت کنید مساحت این مثلث برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

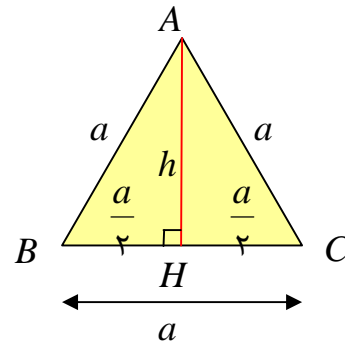
ب: ثابت کنید که اندازه‌ی ارتفاع مثلث برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

حل:

روش هندسی: می‌دانیم که در هر مثلث متساوی الاضلاع، میانه و ارتفاع بر هم منطبقند، پس:

$$\Delta(ABH): h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



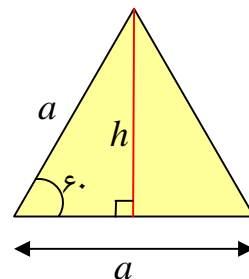
$$S(ABC) = \frac{1}{2}a.h = \frac{1}{2}a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

روش مثلثاتی:

الف:

$$S = \frac{1}{2}(a)(a)\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$S = \frac{1}{2}ah \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{1}{2}ah \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



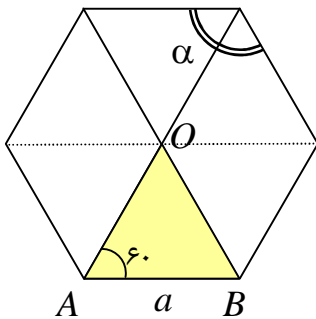
ب:

☑ مساحت شش ضلعی منتظم

مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a را می توان به شکل زیر محاسبه کرد.
ابتدا اندازه‌ی هر زاویه‌ی شش ضلعی منتظم را تعیین می کنیم.

$$\alpha = \frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{(6-2) \times 180}{6} = 120^\circ$$

از طرفی واضح است که بزرگترین قطر هر شش ضلعی منتظم محور تقارن است. لذا بزرگترین قطر، نیمساز زاویه‌های نظیر آن است. پس با توجه به شکل زیر مثلث OAB دو زاویه‌ی 60° درجه دارد، پس زاویه‌ی سوم آن نیز 60° درجه می باشد. چون مثلث OAB سه زاویه‌ی مساوی دارد، در نتیجه متساوی الاضلاع است.

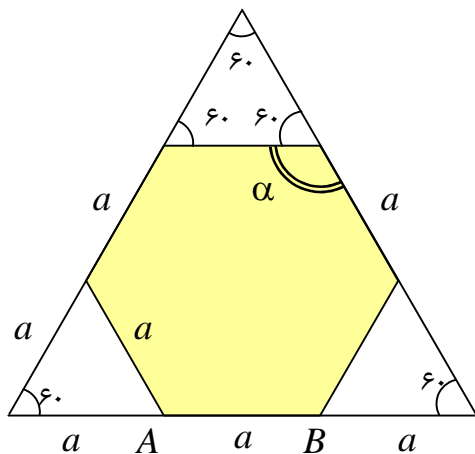


از این موضوع نتیجه می شود که هر شش ضلعی منتظم توسط قطرهای بزرگ آن به شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a تبدیل می شود. بنابراین مساحت آن شش برابر مساحت یک مثلث می باشد.

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

روش دوم: ابتدا اندازه‌ی هر زاویه‌ی شش ضلعی منتظم را تعیین می کنیم.

$$\alpha = \frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{(6-2) \times 180}{6} = 120^\circ$$



حال اگر اضلاع شش ضلعی منتظم را مطابق شکل مقابل امتداد دهیم. بنابراینکه اندازه‌ی زاویه‌های هر مثلث کوچک و همچنین مثلث بزرگ تشکیل شده برابر 60° درجه می باشند. لذا هر یک از این مثلث‌ها متساوی الاضلاع می باشند. پس برای تعیین مساحت شش ضلعی منتظم، مجموع مساحت‌های سه مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را از مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $3a$ کم می کنیم. بنابراین:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (3a)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{6\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

تمرین برای حل :

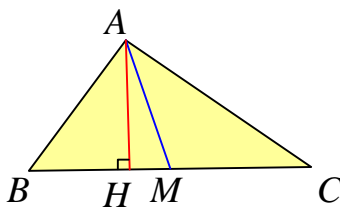
۱: طول ارتفاع و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را حساب کنید که اندازه‌ی ضلع آن ۱۰ سانتی متر باشد.

۲: مساحت یک شش ضلعی منتظم را حساب کنید که طول ضلع آن ۱۰ سانتی متر باشد.

☑ ویژگی میانه و مساحت

میانه‌ی وارد بر هر ضلع مثلث، ویژگی جالبی دارد. به ادامه‌ی مطلب توجه نمایید.

قضیه (میانه‌ی هر ضلع مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

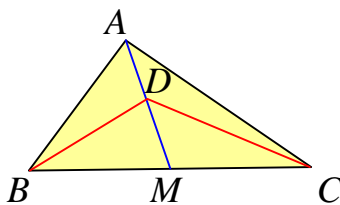


اثبات: اگر AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC فرض شود. در این صورت داریم:

$$BM = CM \xrightarrow{\times \frac{1}{2} AH} \frac{1}{2} AH \times BM = \frac{1}{2} AH \times CM \rightarrow S(ABM) = S(AMC)$$

تمرین ۳: ثابت کنید که هر نقطه دلخواه روی میانه (به جز دو سر میانه)، دو مثلث با مساحت برابر ایجاد

می‌کند.



حل: می‌توان فرض کرد که DM میانه‌ی وارد بر ضلع BC از

مثلث BDC است. پس با توجه به قضیه‌ی فوق می‌توان نوشت:

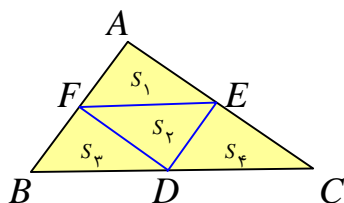
$$S(DBM) = S(DMC)$$

همچنین چون $S(ABM) = S(AMC)$ پس می‌توان نوشت:

$$S(ABM) - S(DBM) = S(AMC) - S(DMC)$$

$$\rightarrow S(ABD) = S(ACD)$$

تمرین ۴: اگر وسط های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم. چهار مثلث هم نهشت و در نتیجه با مساحت های برابر پدید می آورد.

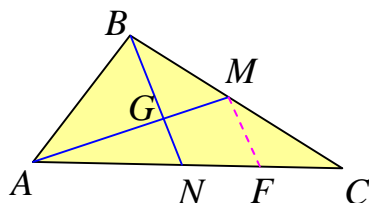


حل: به کمک عکس قضیه‌ی تالس، می دانیم که اگر وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم. پاره خطی بوجود می آید که موازی و مساوی نصف ضلع سوم مثلث است. لذا تمام چهارضلعی های شکل مقابل متوازی الاضلاع بوده و هر یک توسط قطرش به دو مثلث هم نهشت تبدیل می شود. لذا:

$$S_1 = S_2, S_2 = S_3, S_3 = S_4 \rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$

قضیه) سه میانه‌ی هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث هم‌رس اند، به طوری که فاصله‌ی این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه‌ی میانه‌ی نظیر این ضلع است و فاصله اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ میانه‌ی نظیر آن رأس است.

اثبات: دو میانه‌ی AM و BN از مثلث ABC را رسم می کنیم. این دو میانه همدیگر را در نقطه‌ای



مانند G درون مثلث قطع می کنند. از M وسط ضلع BC خطی موازی میانه‌ی BN رسم می کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. در مثلث BNC بنابر قضیه‌ی تالس، چون M وسط BC است، پس F نیز وسط ضلع NC و چون N وسط AC می باشد. پس: $AF = 3NF$

همچنین در مثلث AMF و بنابر قضیه‌ی تالس نتیجه گرفته می شود: $AM = 3GM$

بنابراین $GM = \frac{1}{3}AM$ و $AG = \frac{2}{3}AM$ و G بین A و M است. در نتیجه تنها نقطه‌ای روی نیم

خط AM است که $AG = \frac{2}{3}AM$.

مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{2}{3}BN$ ، پس برای هر دو میانه‌ی دلخواه نقطه‌ی G با این ویژگی به دست می‌آید. در نتیجه سه میانه هم‌مرس‌اند.

حال اگر از M به N وصل کنید و از قضیه‌ی تالس استفاده کنید، چون $AB = 2MN$ پس $AG = 2GM$ و $BG = 2GN$. نتایج مشابه آنچه که در بالا داشتیم ، حاصل می‌شود.

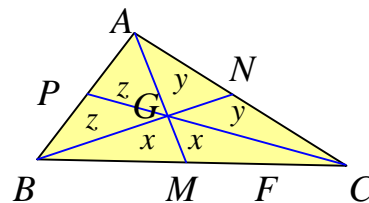
تمرین ۵: ثابت کنید، میانه‌های هر مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

حل: میانه‌ها هم‌مرس‌اند، لذا شش مثلث از تقاطع آنها تشکیل می‌شود. با توجه به اینکه هر نقطه دلخواه روی میانه ، دو مثلث با مساحت برابر ایجاد می‌کند. لذا:

$$\Delta(BGC) : S(BGM) = S(MGC)$$

$$\Delta(AGB) : S(AGP) = S(BGP)$$

$$\Delta(AGC) : S(AGN) = S(CGN)$$



اکنون مساحت‌های این مثلث‌ها را برابر x و y و z قرار می‌دهیم و برای هر میانه نتیجه می‌گیریم که:
برای میانه‌ی AM داریم:

$$S(ABM) = S(ACM) \rightarrow 2z + x = 2y + x \rightarrow z = y$$

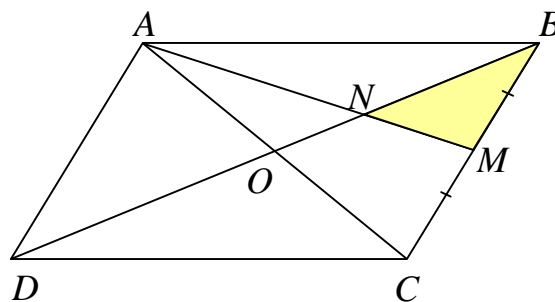
برای میانه‌ی BN داریم:

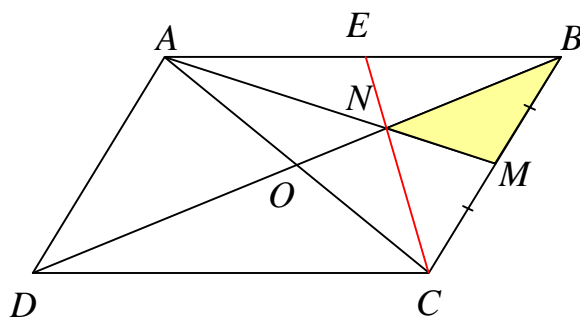
$$S(ABN) = S(BCN) \rightarrow 2z + y = 2x + y \rightarrow z = x$$

پس $x = y = z$. یعنی مساحت هر شش مثلث یکسان است.

تمرین ۶: در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، نقطه‌ی M وسط ضلع BC است و پاره خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید.

$$S(BMN) = \frac{1}{12} S(ABCD)$$





حل: چون M وسط BC و O محل برخورد قطرها) وسط AC می باشد، پس BO و AM می باشند و N محل برخورد آنها است. از طرفی چون میانه های هر مثلث هم‌رسند، پس اگر CN را رسم کنیم و امتداد

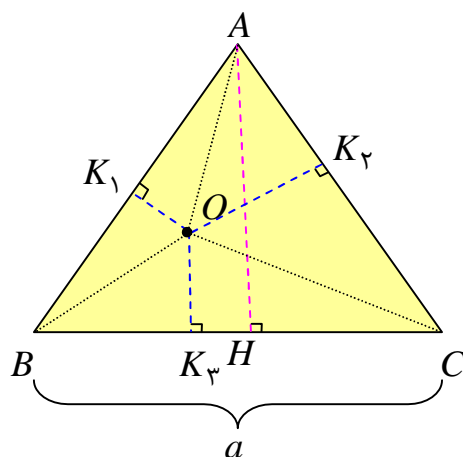
دهیم، میانه‌ی سوم مثلث یعنی CE به دست می آید. میانه های هر مثلث، آن را به شش مثلث هم مساحت تبدیل می کند. پس:

$$S(BMN) = \frac{1}{6} S(ABC)$$

$$\xrightarrow{S(ABC) = \frac{1}{2} S(ABCD)} S(BMN) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} S(ABCD) = \frac{1}{12} S(ABCD)$$

☑ قضیه‌ی ویویانی

مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است و برابر ارتفاع مثلث است. (قضیه‌ی ویویانی)



اثبات: نقطه‌ی دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع ABC را به سه رأس مثلث وصل می کنیم. با توجه به شکل واضح است که:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} = \frac{1}{2}AB \cdot OK_1 + \frac{1}{2}AC \cdot OK_2 + \frac{1}{2}BC \cdot OK_3$$

$$\xrightarrow{AB=AC=BC=a} S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot OK_1 + \frac{1}{2}a \cdot OK_2 + \frac{1}{2}a \cdot OK_3$$

$$\rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}a(OK_1 + OK_2 + OK_3) \quad (1)$$

از طرفی واضح است که :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}a \cdot AH \quad (2)$$

و با مقایسه‌ی روابط ۱ و ۲ داریم :

$$\frac{1}{2}a(OK_1 + OK_2 + OK_3) = \frac{1}{2}a \cdot AH \rightarrow OK_1 + OK_2 + OK_3 = AH$$

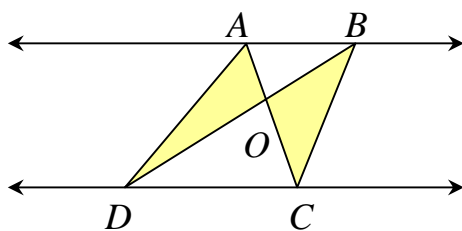
$$\rightarrow OK_1 + OK_2 + OK_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

توجه : مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ و طول ارتفاع آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ می باشد.

تمرین ۷ : اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع، فاصله‌های نقطه‌ی M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۲ و

۴ و ۶ باشند، اندازه‌ی ضلع و ارتفاع مثلث و مساحت مثلث را محاسبه کنید.

☑ خطوط موازی و مساحت



قضیه (فرض کنید که CD و AB موازی باشند. به

طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O

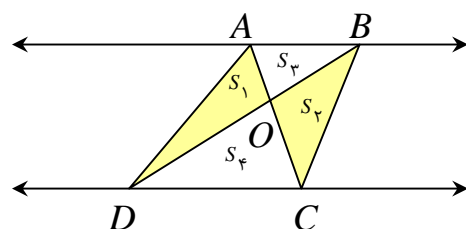
مقاطع باشند، ثابت کنید: $S(OAB) = S(OBC)$

حل : می دانیم که اگر قاعده‌های دو مثلث منطبق بوده و ارتفاع‌های آنها یکسان باشند، آن دو مثلث

مساحت برابر دارند. لذا :

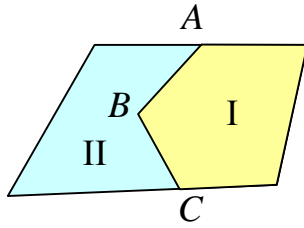
$$S(ADC) = S(BDC) \rightarrow S_1 + S_4 = S_2 + S_4$$

$$\rightarrow S_1 = S_2$$



این ویژگی که در هر ذوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.

تمرین ۸: در شکل زیر دو مزرعه‌ی I و II متعلق به دو کشاورز



برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC

بین دو زمین خود را به یک پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که

مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار

را برای آنها انجام دهید؟

حل: از A به C متصل و سپس از نقطه‌ی B خطی رسم کنید که

موازی AC بوده و دو مرز دیگر را در نقاط E و F قطع کند. حال

اگر F به A متصل کنیم. طبق مسئله‌ی قبل واضح است که

$$S(AOB) = S(FOC)$$

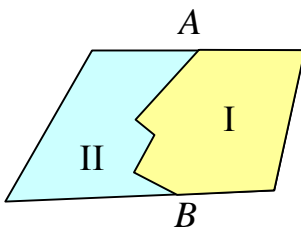
پس خط AF می‌تواند مرز جدید بوده و جواب مسئله است.

توجه: به همین دلیل خط EC نیز می‌تواند جواب مسئله باشد.

برای مطالعه:

بحث کلاسی: روش حل تمرین‌های مطرح شده را می‌توان برای

شکل مقابل نیز تعمیم داد. در مورد حل مسئله‌ی زیر بحث کنید.



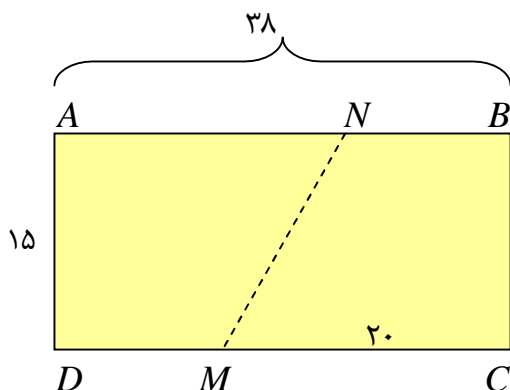
تمرین ۹: زمین مستطیلی شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور

مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط

از نقطه‌ی M که $MC = ۲۰$ است، به یک کوچه راه

دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو

قطعه‌ی با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود؟



کل مساحت زمین برابر $۳۸ \times ۱۵ = ۵۷۰$ متر مربع است. لذا برای هر شخص باید نصف آن یعنی ۲۸۵ متر مربع برسد. پس مساحت چهارضلعی $NBCM$ برابر ۲۸۵ شود. این چهارضلعی دوزنقه است. پس داریم:

$$\frac{1}{2}(NB + MC) \times BC = ۲۸۵$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(NB + ۲۰) \times ۱۵ = ۲۸۵ \rightarrow NB + ۲۰ = ۳۸ \rightarrow NB = ۱۸$$

تهیه کننده: جابر عامری

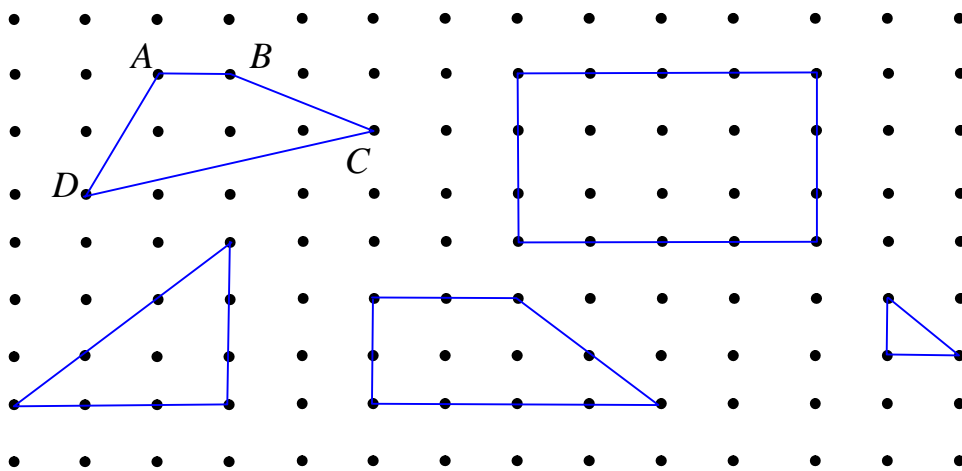
دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و بوی

درس چهارم : مساحت چندضلعی شبکه‌ای

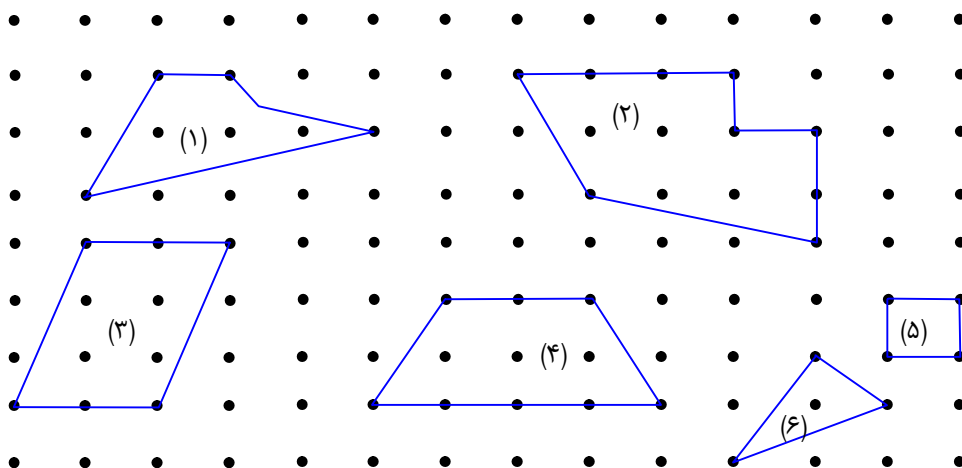
در آخر این فصل یک روش جالب برای محاسبه‌ی سطح یک شکل یا منحنی بسته معرفی می‌کنیم.

☑ نقاط شبکه‌ای و مساحت

مطابق شکل‌های زیر، نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند. به طوری که فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد باشد^۱. چنین نقطه‌ی را **نقاط شبکه‌ای** و چندضلعی‌هایی مانند $ABCD$ را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، **چندضلعی‌های شبکه‌ای** می‌نامند.



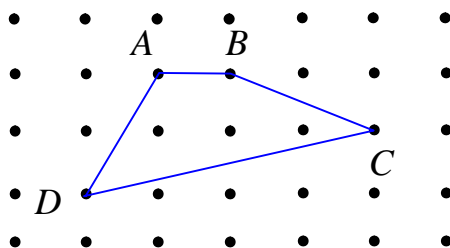
تمرین ۱: با توجه به شکل زیر تعیین کنید، کدام چندضلعی شبکه‌ای است؟



^۱. به عبارتی دیگر مختصات تمام نقاط عدد صحیح باشند.

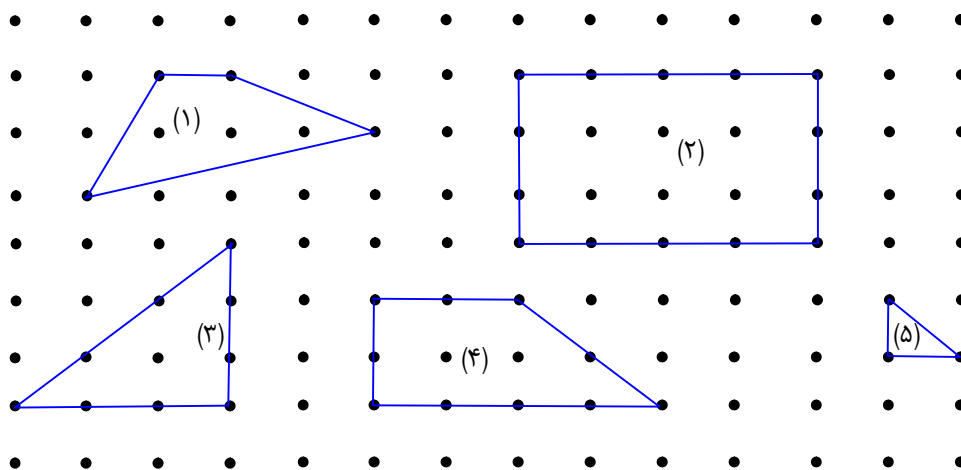
حل : مطابق تعریف تمام چندضلعی‌ها به جز شکل (۱) شبکه‌ای هستند. زیرا یک رأس شکل (۱) روی نقطه‌ی شبکه‌ای نیست.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را **نقاط مرزی** و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی را **نقاط درونی** شبکه‌ای برای چند ضلعی شبکه‌ای می‌نامند. به طور مثال در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک چهارضلعی شبکه‌ای است و دارای ۴ نقطه‌ی مرزی و ۳ نقطه‌ی درونی شبکه‌ای است.



در چند ضلعی‌های شبکه‌ای، تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان می‌دهند.

تمرین ۲: در هر مورد تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را تعیین کنید.



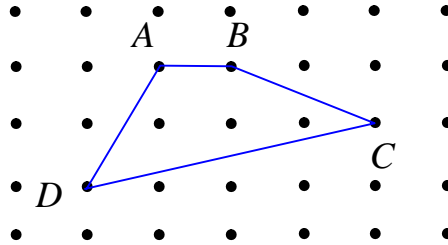
تمرین ۳: یک چندضلعی شبکه‌ای، حداقل چند نقطه‌ی مرزی و حداقل چند نقطه‌ی درونی می‌تواند داشته باشد؟

نتیجه: در هر چندضلعی شبکه‌ای تعداد نقاط مرزی عدد طبیعی و تعداد نقاط درونی یک عدد حسابی است. یعنی:

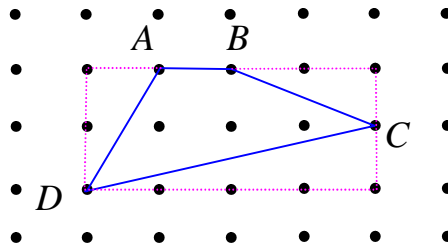
$$b \in \mathbb{N} \text{ و } i \in \mathbb{W}$$

مساحت چندضلعی شبکه‌ای

با توجه به شکل زیر ، واضح است که با بکار بردن مساحت مثلث های قائم الزاویه و مستطیل می توان مساحت چهارضلعی شبکه ای را محاسبه کرد.



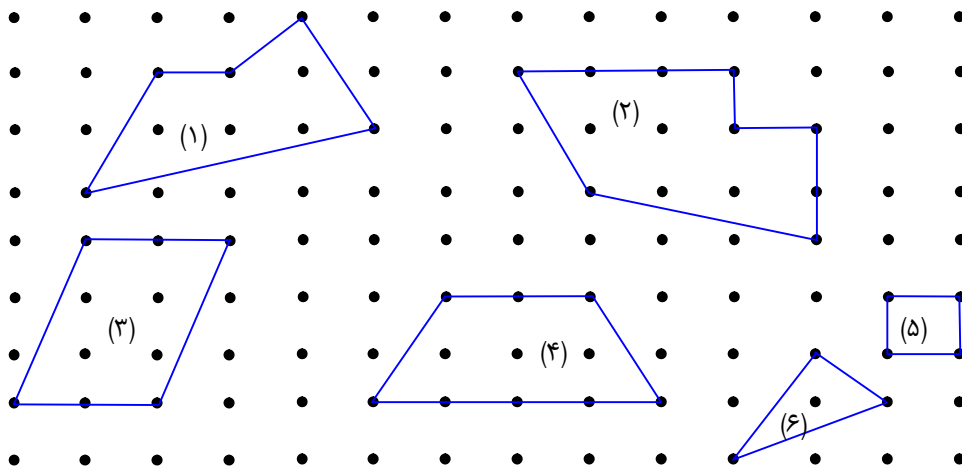
این روش محاسبه با امتداد اضلاع و تشکیل مثلث های قائم الزاویه انجام است.



اگر از مساحت مستطیل بدست آمده، مساحت سه مثلث قائم الزاویهی کناری را کم کنیم، مساحت چهارضلعی ABCD به دست می آید.

$$S = (2 \times 4) - \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 4\right) = 8 - 1 - 1 - 2 = 4$$

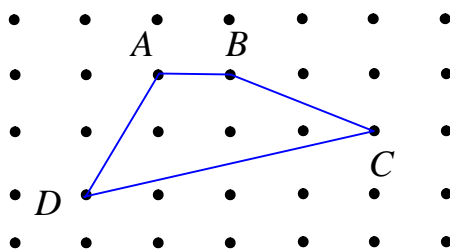
تمرین ۴: به این روش ، مساحت ، چندضلعی های شبکه ای زیر را محاسبه کنید.



جرج الکساندر پیک (۱۹۴۳ - ۱۸۵۹) فرمولی برای محاسبه‌ی مساحت چندضلعی های شبکه ای کشف کرد. طبق این فرمول کافی است تعداد نقاط درونی شبکه ای و تعداد نقاط مرزی شبکه ای را داشته باشیم، تا مساحت چندضلعی به دست آید.

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

برای مثال مساحت چندضلعی شبکه ای زیر طبق این فرمول به صورت زیر است.

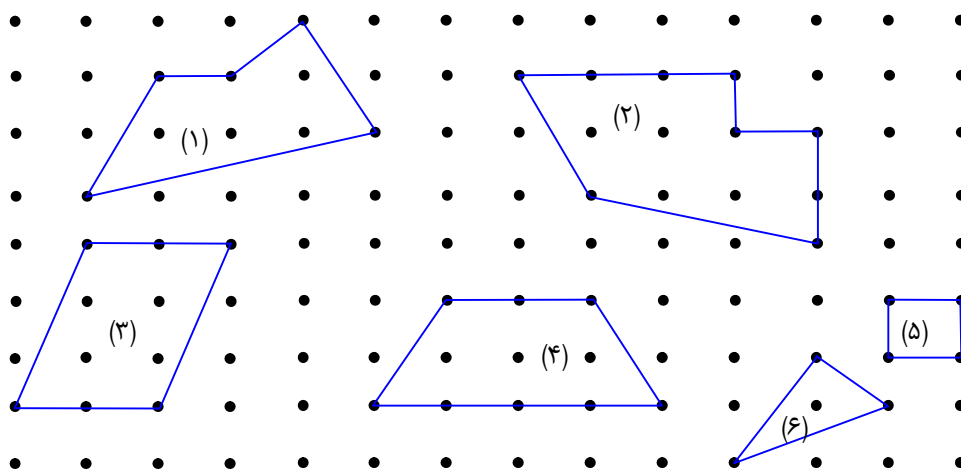


$$b = 4 \quad \text{و} \quad i = 3$$

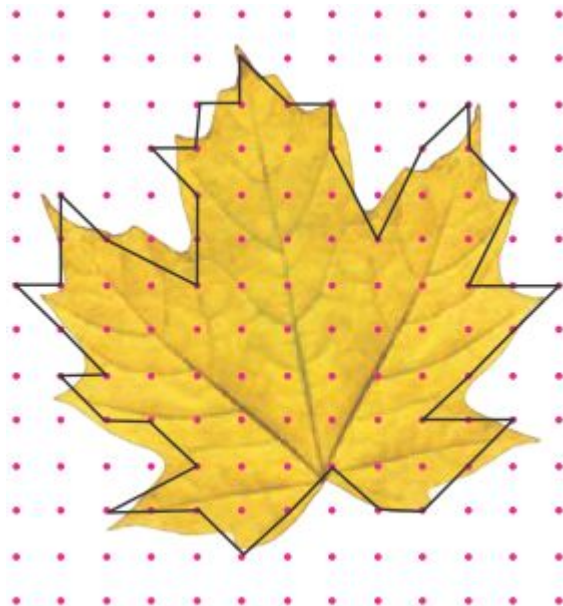
$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{4}{2} + 3 - 1 = 4$$

این نتیجه را در تمرین های قبل نیز به کمک مثلث های قائم الزاویه و مستطیل به دست آوردیم.

تمرین ۵: به کمک فرمول پیک، مساحت چندضلعی های شبکه ای زیر را محاسبه کنید.



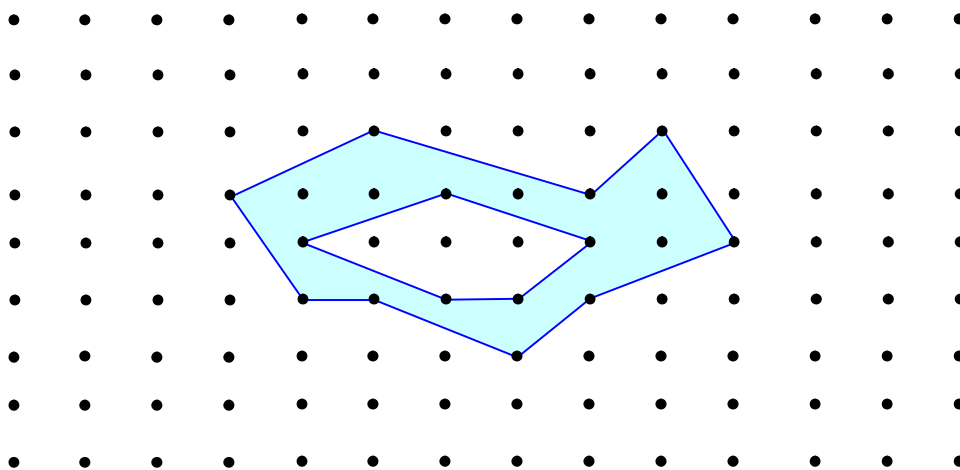
توجه : در اینجا فرمول پیک را به طور شهودی می پذیریم و به جهت نیاز به مقدمات زیاد، از اثبات استنتاجی آن خودداری می کنیم. اضافه می شود که می توان به کمک این فرمول مساحت شکل های نامنظم هندسی را نیز به طور تقریبی پیدا کرد.



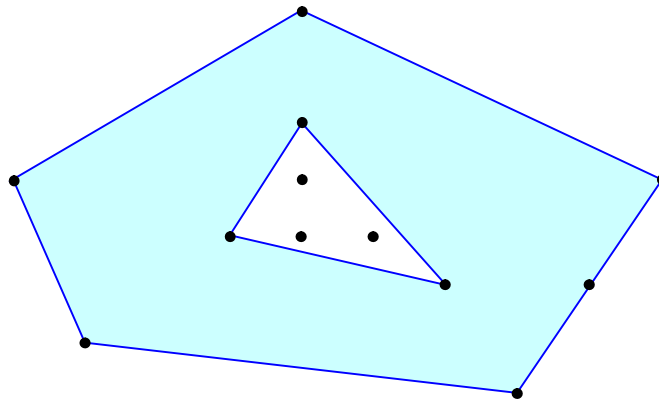
واضح است که با کوچک کردن واحدها (فاصله‌ی افقی و عمودی بین نقاط شبکه ای) می توان تقریب بهتری از مساحت به دست آورد.

این فرمول در باستان شناسی و زیست شناسی و کاربردهای مختلفی دارد. برای مثال محاسبه‌ی مساحت برگ درخت ، محاسبه‌ی مساحت اثر پای یک دایناسور و

تمرین ۶: به کمک فرمول پیک ، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید.



تمرین ۷: در شکل زیر ، مساحت قسمت رنگی ۳۶/۵ می باشد. تعداد نقاط درونی چندضلعی بیرونی را بیابید.



حل : واضح است که مساحت قسمت رنگی با تفاضل مساحت مساحت های چندضلعی درونی از چند ضلعی بیرون است. حال اگر b_1 و i_1 به ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی بیرونی و b_2 و i_2 به ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی درونی فرض کنیم، در این صورت می توان نوشت:

$$S = S_1 - S_2$$

$$\rightarrow S = \left(\frac{b_1}{2} + i_1 - 1\right) - \left(\frac{b_2}{2} + i_2 - 1\right) \rightarrow S = \frac{b_1 - b_2}{2} + i_1 - i_2$$

طبق معلومات مسئله داریم:

$$36/5 = \frac{6 - 3}{2} + i_1 - 3 \rightarrow i_1 = 38$$

تمرین ۸: در یک چندضلعی شبکه ای ، تعداد نقاط درونی سه برابر تعداد نقاط مرزی است. اگر مساحت این

چندضلعی برابر ۱۳ باشد. تعداد نقاط درونی را بیابید.

حل : طبق مسئله داریم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \xrightarrow{i=3b, S=13} 13 = \frac{b}{2} + 3b - 1 \rightarrow 14 = \frac{7b}{2} \rightarrow b = 4$$

$$\rightarrow i = 3b = 3(4) = 12$$

تمرین ۹: در یک لوزی شبکه ای تمام نقاط مرزی فقط روی رئوس آن واقع اند، اگر مساحت لوزی ۴ باشد،

تعداد نقاط درونی را بیابید.

حل : واضح است که $b = 4$ و $S = 4$ لذا :

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \rightarrow 4 = \frac{4}{2} + i - 1 \rightarrow i = 3$$

تمرین ۱۰: یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحد

هستند، را در نظر بگیرید. به کمک فرمول پیک ثابت کنید که مساحت مستطیل برابر mn است.

حل: اگر اندازه‌ی طول مستطیل را m و عرض آن را n فرض کنیم. در این صورت روی طول مستطیل

$m + 1$ نقطه و به همین صورت روی عرض مستطیل $n + 1$ نقطه داریم. اما واضح است که دو نقطه روی

عرض قبلاً در محاسبه‌ی نقاط روی طول محاسبه شده‌اند. لذا نقاط روی عرض برابر $n - 1$ می‌مانند. از

اینجا نتیجه می‌شود که تعداد نقاط مرزی مستطیل برابر

$$b = 2(m + 1) + 2(n - 1) = 2(m + n)$$

است.

اما برای محاسبه‌ی تعداد نقاط درونی ستون اول و آخر را کنار می‌گذاریم. چون $n - 1$ ستون داریم و روی

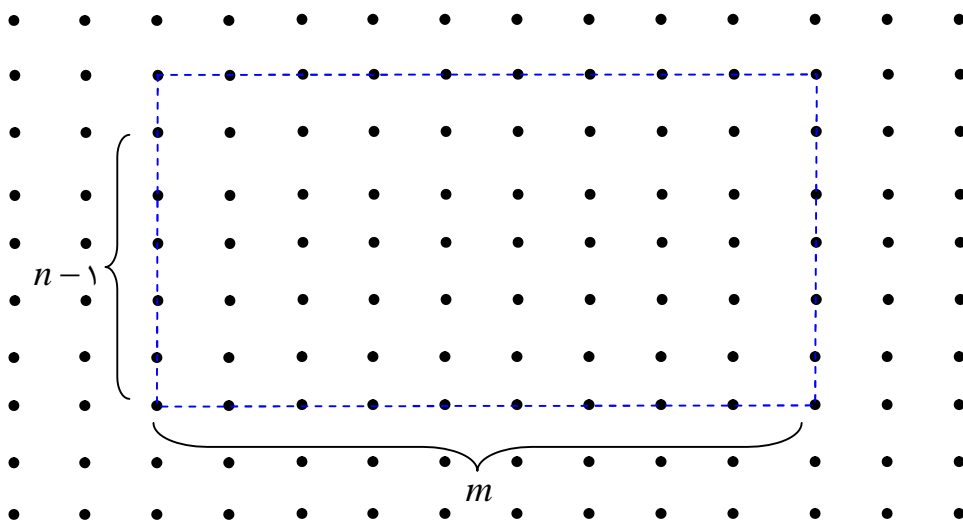
هر ستون $m - 1$ نقطه است. پس تعداد نقاط درونی برابر

$$i = (m - 1)(n - 1) = mn - m - n + 1$$

است.

لذا مساحت مستطیل، طبق فرمول پیک به شکل زیر است.

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{2(m + n)}{2} + (mn - m - n + 1) - 1 = mn$$



تمرین ۱۱ : مساحت یک چندضلعی شبکه ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت های مختلف که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل های چهارضلعی های نظیر آن را رسم کنید.

حل : طبق مسئله داریم:

$$S = 3 \rightarrow \frac{b}{2} + i - 1 = 3 \rightarrow b + 2i = 8$$

از طرفی از اینکه $b \geq 3$ و $i \geq 0$ نتیجه می شود.

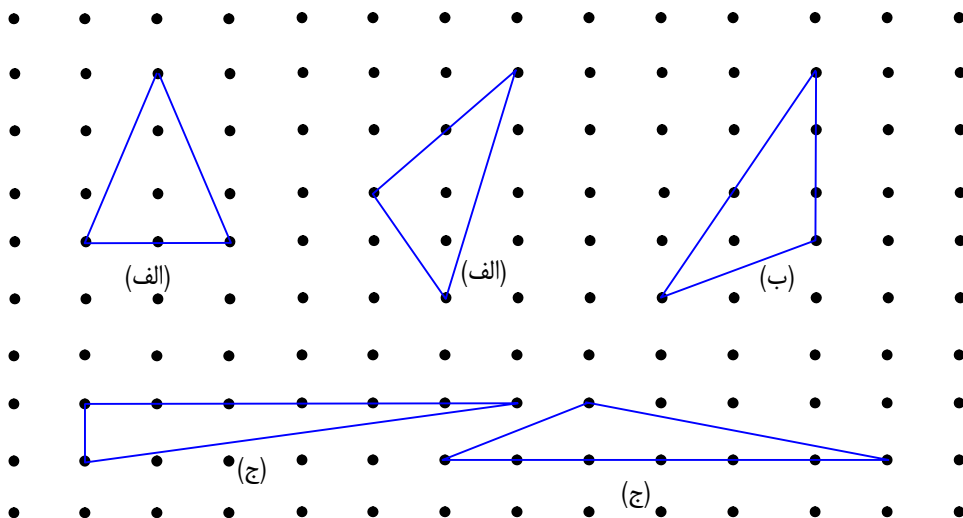
$$i \geq 0 \xrightarrow{\times 2} 2i \geq 0 \rightarrow 8 - b \geq 0 \xrightarrow{b \geq 3} 3 \leq b \leq 8$$

و چون $b = 2(4 - i)$ پس b باید زوج باشد. لذا b فقط می تواند سه مقدار ۸ و ۶ و ۴ را اختیار کند.

به کمک این اطلاعات می توان جدول زیر را تنظیم کرد.

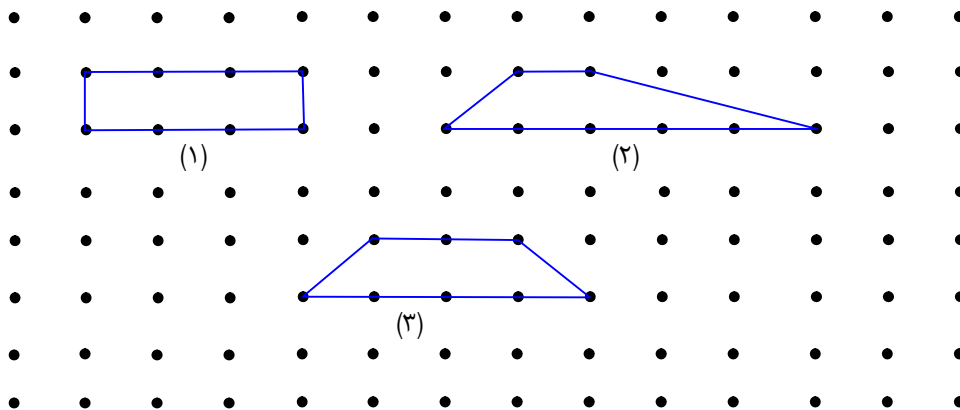
حالت	الف	ب	ج
b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰

اکنون به این تعداد مثلث شبکه ای را با توجه به حالت های فوق رسم می کنیم.



البته می توان رأی بالا را روی هر یک از نقاط بالایی ضلع قرار داد.

وقتی نقاط مرزی بیشترین مقدار را دارند که $i = 0$ و $b = 8$ باشد. سه چهارضلعی نظیر آن به صورت زیر است.

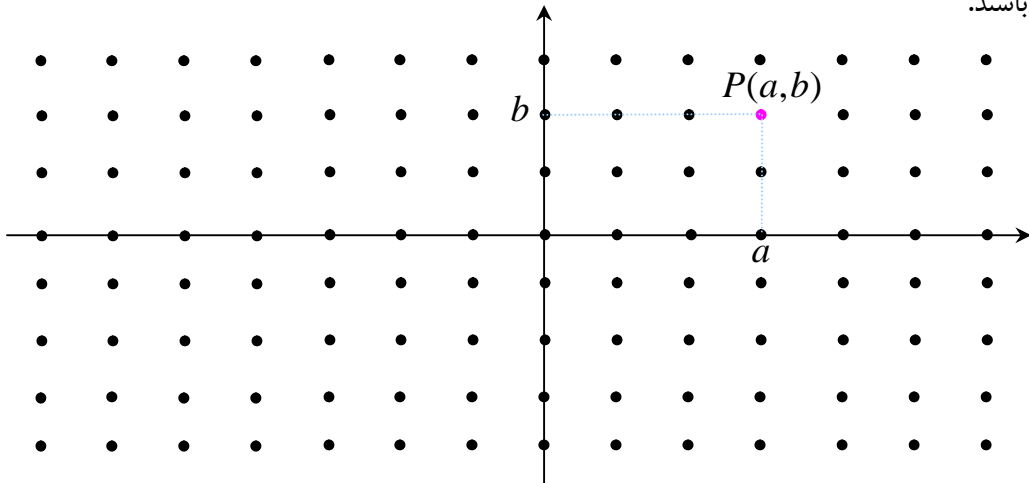


با تغییر دو نقطه‌ی بالایی می‌توانید، دوزنقه‌های دیگری را نیز رسم کنید.

نقاط شبکه‌ای و دستگاه مختصات

مطابق تعریف نقاط شبکه‌ای، می‌توان گفت که مختصات هر نقطه‌ی شبکه‌ای اعداد صحیح می‌باشند. به عبارت دیگر هر نقطه‌ی شبکه دارای مختصاتی به صورت (a, b) است، به طوری که a و b اعداد صحیح

می‌باشند.



بدیهی است که اگر $A(a, b)$ و $B(c, d)$ دو نقطه‌ی شبکه‌ای باشند، در این صورت اندازه‌ی پاره خط AB

به صورت زیر است:

$$AB = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

لذا :

$$AB^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$$

نتیجه :

۱ : توان دوّم ، اندازه‌ی هر پاره خط که ابتدا و انتهای آن نقاط شبکه‌ای باشند، یک عدد گویا است.

۲ : طبق فرمول پیک، مساحت هر چند ضلعی شبکه‌ای یک عدد گویا و مثبت است. (زیرا تعداد نقاط مرزی و درونی یک عدد طبیعی است.)

تمرین ۱۲ : ثابت کنید که مثلث متساوی الاضلاعی وجود ندارد که مختصات هر سه رأس آن عدد صحیح باشند.

حل : فرض کنیم که مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع m وجود دارد، طوری مختصات تمام رئوس آن عدد صحیح باشند. لذا مساحت آن طبق فرمول پیک یک عدد گویا است. از طرفی می دانیم که مساحت هر

مثلث متساوی الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} m^2$ است و این یک عدد گنگ می باشد. چون مساحت مثلث نمی تواند

هم گنگ و هم گویا باشد، پس چنین مثلثی وجود ندارد.

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی