

آزمون ورودی پایه دهم

دبیرستان های دوره دوم استعداد های درخشان

سراسر کشور در سال تحصیلی ۹۶-۱۳۹۵

ریاضی

دفترچه شماره (۲): استعداد تحصیلی

نام و نام خانوادگی:

تاریخ برگزاری آزمون: ۱۳۹۵ / ۲ / ۲۴

ساعت برگزاری آزمون: ۹:۰۰ صبح

تعداد صفحات دفترچه: ۱۶ صفحه

تعداد سؤالات دفترچه: ۷۵ سؤال (ردیف ۱۶ تا ۹۰)

مدت پاسخ گویی به سؤالات: ۸۵ دقیقه

قرآن و معارف اسلامی | ۸ سؤال

زبان و ادبیات فارسی | ۱۵ سؤال

مطالعات اجتماعی | ۱۵ سؤال

علوم تجربی | ۱۷ سؤال

ریاضیات | ۲۰ سؤال





۷۱- چند زیرمجموعه سه عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که حاصل ضرب اعضای آن

در هم، برابر ۴۵ شود؟ $\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$: مجموعه شمارنده های ۴۵

حالت های مطلوب: $\{1, 3, 15\}$ و $\{1, 5, 9\}$

① یک ② دو
 ③ سه ④ چهار

* توجه کنید که حالت هایی مثل $\{3, 3, 9\}$ مورد قبول نیستند؛

زیرا در این صورت، با حذف عضو تکراری، زیر مجموعه ای دو عضوی خواهیم داشت.



پاسخ صحیح

۴

۳



۱





۷۲- از تساوی $\sqrt{ab^2c^3} \times \sqrt{-a^2b^3c} = 2$ کدامیک از گزینه های زیر نتیجه می شود؟

$$b < 0 \quad \textcircled{2}$$

$$a > 0 \quad \textcircled{1}$$

$$ab < 0 \quad \textcircled{4}$$

$$abc < 0 \quad \textcircled{3}$$

مقدار زیر هیچ یک از رادیکال ها نباید منفی شود. بنابراین یکی از دو حالت زیر رخ می دهد:

$$a > 0, c > 0, b < 0 \quad \text{یا} \quad a < 0, c < 0, b > 0$$

با توجه به مختلف العلامت بودن a و b تنها گزینه ای که همواره برقرار است، گزینه ۴ خواهد بود.



پاسخ صحیح





۷۳- زاویه بین دو محور تقارن متوالی از یک چندضلعی، کدامیک از اعداد زیر می تواند باشد؟

$$31^\circ \text{ (2)}$$

$$7^\circ \text{ (4)}$$

$$\sqrt{360}^\circ \text{ (1)}$$

$$\frac{1}{5}^\circ \text{ (3)}$$

n ضلعی منتظم، n محور تقارن دارد که زاویه بین هر دو محور تقارن متوالی آن از رابطه $\frac{360}{2n}$ به دست می آید

حال باید دید کدام گزینه را می توان به این صورت نوشت. در اینجا به عنوان نمونه دو گزینه را آزمایش می کنیم:
(توجه کنید که یس از تشکیل و حل معادله، باید n عددی طبیعی شود)

آزمایش گزینه ۲: 360 بر 62 بخش پذیر نیست $\frac{360}{2n} = 31 \Rightarrow 62n = 360 \Rightarrow n = \frac{360}{62} \rightarrow$

آزمایش گزینه ۳ برای 900 ضلعی منتظم رابطه برقرار است $\frac{360}{2n} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2n = 1800 \Rightarrow n = \frac{1800}{2} = 900 \rightarrow$

پاسخ صحیح

۴



۲

۱



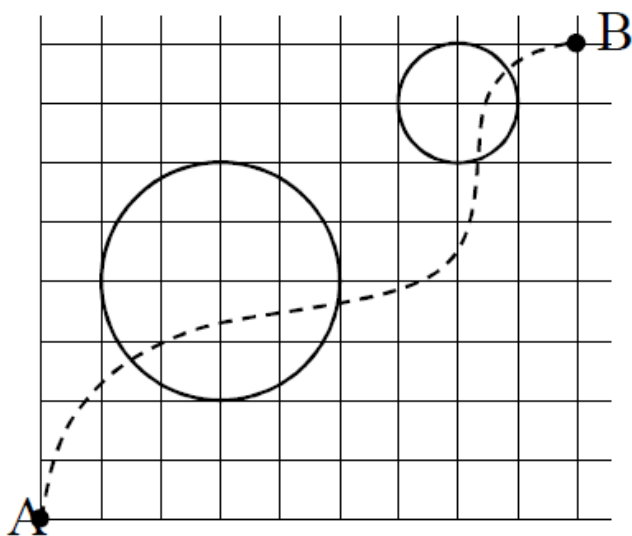
③ ۷۸ عضو

توجه کنید که صورت و مخرج کسرهای بالا نسبت به هم اول هستند.

1



۷۵- در یک روز بارانی، علی می خواهد از نقطه A به نقطه B برود. مطابق شکل، در مسیر او چادرهای دایره ای شکلی هستند که او را از باران حفظ می کنند. یکی از مسیرهای ممکن که علی می تواند طی کند تا به مقصد برسد، با خط چین مشخص شده است. علی دست کم چه مسافتی را زیر باران خواهد پیمود؟



$$4 + \sqrt{5} \text{ ①}$$

$$\sqrt{145} - 6 \text{ ②}$$

$$\sqrt{13} + 2 + \sqrt{2} \text{ ③}$$

$$\sqrt{2} + 6 \text{ ④}$$

۴

۳

۲

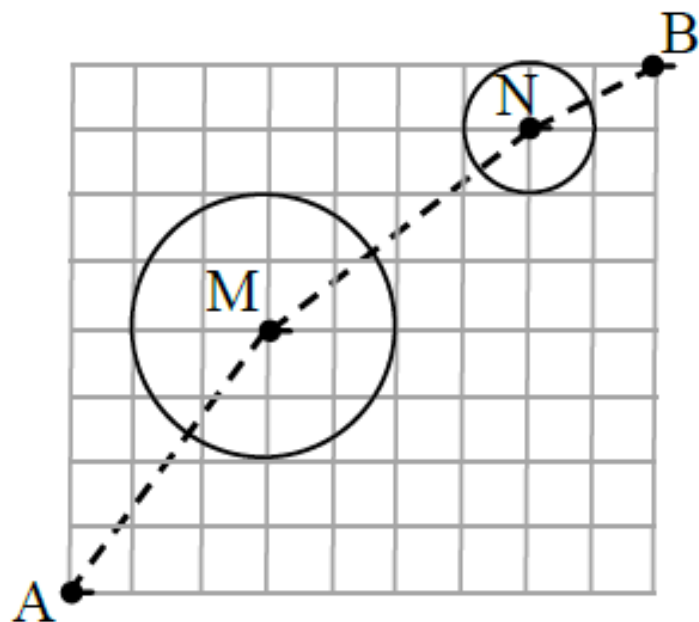
۱





کوتاه ترین مسیر، مسیر خط چین شکسته AMNB است؛ که البته باید بخش هایی که درون دایره ها قرار گرفته اند از آن کم شود.

طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$\sqrt{145} - 6 \text{ (2)}$$

$$\sqrt{13} + 2 + \sqrt{2} \text{ (3)}$$

$$\sqrt{2} + 6 \text{ (4)}$$



پاسخ صحیح

۴

۳

۲

۱





$$AM^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow AM = \sqrt{25} = 5$$

$$MN^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow MN = \sqrt{25} = 5$$

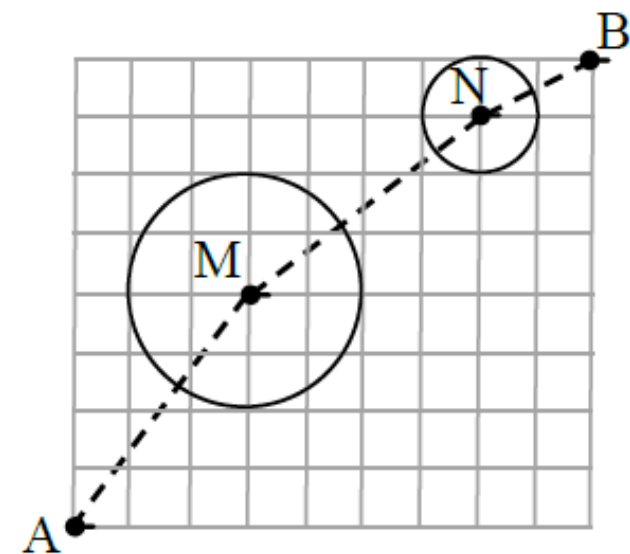
$$NB^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow NB = \sqrt{5}$$

$$4 + \sqrt{5} \textcircled{1}$$

$$\sqrt{145} - 6 \textcircled{2}$$

$$\sqrt{13} + 2 + \sqrt{2} \textcircled{3}$$

$$\sqrt{2} + 6 \textcircled{4}$$



کوتاه‌ترین مسیر برابر است با:

$$5 + 5 + \sqrt{5} - 2 \times (2 + 1) = 4 + \sqrt{5}$$

(۲ برابر مجموع شعاع‌ها را کم کردیم)

پاسخ صحیح

۴

۳

۲





۷۶- دو عدد را با تقریب کمتر از ۱ قطع کرده‌ایم و حاصل را در هم ضرب کرده‌ایم و عدد ۱۶۰۰ به دست آمده است. اگر ابتدا دو عدد را در هم ضرب می‌کردیم و بعد حاصل را قطع می‌کردیم، حاصل برابر کدام گزینه می‌توانست باشد؟

۳۲۰۲ (۲)

۳۲۰۱ (۱)

۱۵۹۹ (۴)

۱۵۹۸ (۳)

با توجه به اینکه هر دو عدد قطع شده‌اند، بنابراین حاصل ضرب واقعی آن‌ها نباید از ۱۶۰۰ کمتر شود. (گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند.) دو عدد هر قدر هم بزرگ باشند، نمی‌توانند خود ۱۶۰۱ و ۲ باشند؛ پس حاصل ضرب واقعی آن‌ها قطعاً باید از ۳۲۰۲ (حاصل ضرب ۱۶۰۱ و ۲) کمتر باشد. (چون قرار است حاصل ضرب، به صورت تقریبی و به روش قطع کردن محاسبه شود.) به این ترتیب، تنها گزینه‌ای که می‌تواند درست باشد، گزینه ۱ است.



پاسخ صحیح

۴

۳

۲





۷۷- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- از چسباندن دو چندضلعی مقعر می‌توان یک چندضلعی محدب ساخت.
- از چسباندن دو چندضلعی محدب می‌توان یک چندضلعی مقعر ساخت.
- از چسباندن دو چندضلعی مقعر می‌توان یک چندضلعی مقعر ساخت.

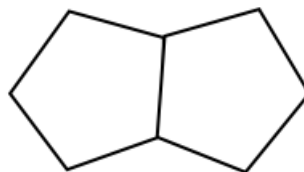
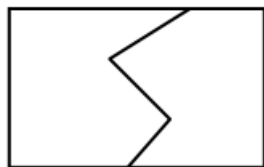
② یک

① صفر

④ سه

③ دو

با توجه به اینکه در هر سه عبارت از کلمه «می‌توان» استفاده شده، هر سه درست هستند.



مثال تصویری:

چسباندن دو چند ضلعی مقعر = مقعر / چسباندن دو چند ضلعی محدب = محدب



پاسخ صحیح





۷۸- منظورمان از دستور $a * b$ رسم دوزنقه متساوی الساقینی است که قاعده کوچک آن a و قاعده بزرگ آن b و طول دو ساق آن نیز برابر یک است. می دانیم بعضی دستورات مثل $۵ * ۱$ قابل اجرا نیستند. اگر $a * b$ دستوری قابل اجرا باشد، کدام گزاره نادرست است؟

① $(a + ۴) * (b + ۴)$ می تواند قابل اجرا باشد.

② $۴a * ۴b$ می تواند قابل اجرا باشد.

③ $۴a * ۴b$ می تواند قابل اجرا نباشد.

④ $(a + ۴) * (b + ۴)$ می تواند قابل اجرا نباشد.

اگر $a * b$ قابل اجرا باشد حتماً $(a + ۴) * (b + ۴)$ قابل اجرا است زیرا به قاعده کوچک و بزرگ به یک مقدار مساوی اضافه شده است.



پاسخ صحیح





۷۹- حرکت سرانگشت شخصی برای گرفتن یک شماره پنج رقمی روی تلفن دیجیتالی،

به شکل مقابل است. با فرض اینکه سرانگشت او حرکت اضافه نداشته باشد شماره‌هایی که ممکن است او گرفته باشد چقدر است؟



② ۱۴ شماره

① ۷ شماره

④ ۲۸ شماره

③ ۲۲ شماره

با توجه به مسیر حرکت انگشت ها، ۴ رقم از شماره تلفن مورد نظر قطعاً باید رقم های ۱، ۷، ۳ باشند. ترتیب این رقم ها باید به همین شکل یا عکس آن باشد. اجازه نداریم از

مسیر دیگری استفاده کنیم. مثلاً نمی توانیم از ۵ به ۸ برویم یا از ۱ به ۷

با راهبرد الگوسازی : ۳۷۹۱۹، ۳۷۹۱۵، ۱۹۷۳۷، ۱۹۷۳۵

۱۵۹۷۳، ۱۹۸۷۳، ۱۹۷۵۳، ۱۱۹۷۳، ۱۹۹۷۳، ۱۹۷۷۳، ۱۹۷۳۳

و همچنین مقلوب آن ها که ۲۲ شماره می شود .

پاسخ صحیح

۴



۲

۱





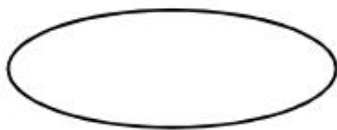
۸۰- مقداری آب را در استوانه‌ای که سر و ته آن بسته است، ریخته‌ایم. با حرکت دادن این استوانه در جهات مختلف، سطح آب به کدام شکل نمی‌تواند باشد؟ (به صورت مستقیم و از بالا به سطح آب نگاه کرده‌ایم.)



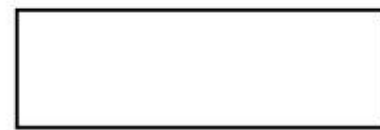
۲



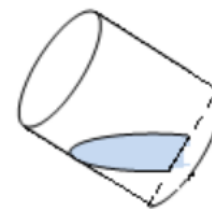
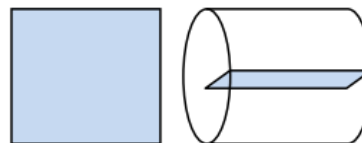
۱



۴



۳



پاسخ صحیح

۴

۳



۱



۸۱- کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- ① مکعب مستطیلی وجود دارد که اندازه همه ابعاد آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.
- ② کره‌ای وجود دارد که اندازه شعاع آن گنگ و حجم و مساحت جانبی آن عددی گویا باشد.
- ③ مکعب مستطیلی وجود دارد که مساحت همه وجه‌های آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.
- ④ کره‌ای وجود دارد که مساحت جانبی آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.

با توجه به این که در فرمول حجم و مساحت کره عدد π وجود دارد

باید شعاع کره برای گویا شدن عدد حجم، عددی گنگ مانند $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ باشد زیرا حجم برابر می شود با

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \right)^3 = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$$



پاسخ صحیح

۴

۳

۲

۱





۸۱- کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- ① مکعب مستطیلی وجود دارد که اندازه همه ابعاد آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.
- ② کره‌ای وجود دارد که اندازه شعاع آن گنگ و حجم و مساحت جانبی آن عددی گویا باشد.
- ③ مکعب مستطیلی وجود دارد که مساحت همه وجه‌های آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.
- ④ کره‌ای وجود دارد که مساحت جانبی آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

اما شعاع کره برای گویا شدن عدد مساحت باید عددی گنگ مانند

$$S = 4\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^2 = 4$$

باشد زیرا مساحت برابر می شود با

به همین علت نمی توان عدد گنگ مشترک برای گویا کردن عدد حجم و مساحت کره پیدا کرد.



پاسخ صحیح

۴

۳

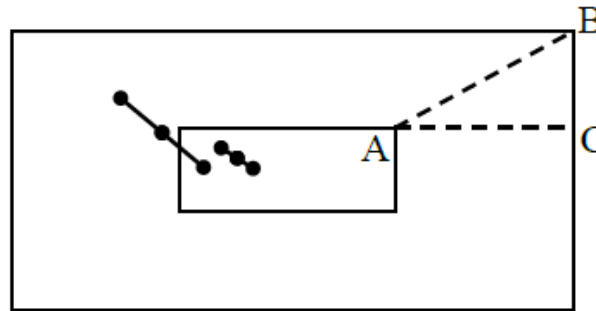


۱





۱۰۰,۰۰۰ و نقشه دوم با
ن دو نقشه با پاره خطی
، به طوری که شمال هر
خط چه می توان گفت؟



۸۲- علی دو نقشه از شهر
مقیاس ۱ به ۲۵,۰۰۰ او
به هم وصل کرده و مرکز
دو نقشه، در یک جهت

② قطعاً صفر است.

① می تواند به اندازه طول نقشه اول باشد.

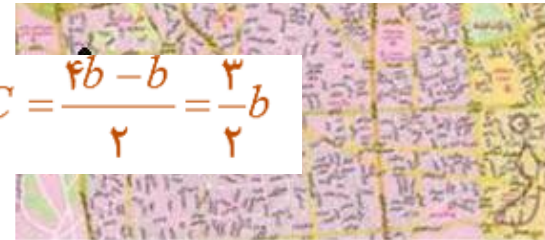
با توجه به مقیاس های داده شده، می توان نتیجه گرفت که طول هر پاره خط روی نقشه دوم، ۴ برابر طول پاره خط متناظر آن روی نقشه اول است. اگر طول نقشه اول a باشد، طول نقشه دوم $4a$ است و اگر عرض نقشه اول را b در نظر بگیریم، عرض



نق

با توجه به شکل مقابل و متشابه بودن دو نقشه، فاصله مرکز دو پاره خط باید از طول پاره خط AB کمتر باشد.

$$AC = \frac{4a - a}{2} = \frac{3}{2}a \quad \text{و} \quad BC = \frac{4b - b}{2} = \frac{3}{2}b$$



پاسخ صحیح

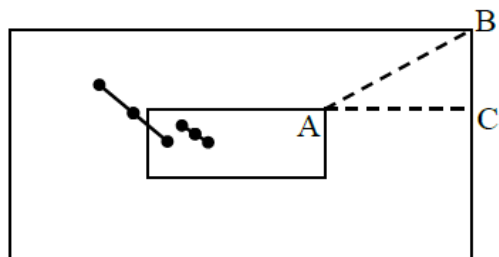
۴

۳

۲

۱





۸۲- علی دو نقشه از شهر خود دارد. نقشه اول با مقیاس ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ و نقشه دوم با مقیاس ۱ به ۲۵,۰۰۰. او محل کار و منزل خود را در هریک از این دو نقشه با پاره خطی به هم وصل کرده و مرکز این دو نقشه را روی هم قرار داده است، به طوری که شمال هر دو نقشه، در یک جهت است. در مورد فاصله مرکز این دو پاره خط چه می توان گفت؟

② قطعاً صفر است.

① می تواند به اندازه طول نقشه اول باشد.

④ نمی تواند صفر باشد.

③ می تواند به اندازه طول نقشه دوم باشد.

$$\Rightarrow AB < \frac{3}{\sqrt{2}}a = \frac{3\sqrt{2}}{2}a \simeq 2/1 a$$

از طرفی: $a < 2/1 a < 4a$ ؛ بنابراین، فاصله مرکز دو پاره خط می تواند به اندازه طول نقشه اول باشد (تأیید گزینه ۱)،

نمی تواند به اندازه طول نقشه دوم باشد. (رد گزینه ۳)

اگر مرکز پاره خطها دقیقاً در مرکز هر نقشه باشد، فاصله صفر خواهد شد. (رد گزینه ۴)

اما اگر چنین نباشد، می تواند صفر نباشد. (رد گزینه ۲)

پاسخ صحیح

۴

۳

۲





۸۳- بزرگ‌ترین هرمی که می‌تواند به طور کامل در یک استخر به طول ۲۰ متر و عرض ۱۲ متر و عمق ۴ متر ساخته شود را در نظر بگیرید. حداکثر چه تعداد هرم با حجم این هرم می‌توان درون این استخر ساخت؟



- ② دو تا
④ چهار تا

- ① یکی
③ سه تا

حجم هرم برابر است با یک سوم حجم منشور هم مساحت و هم ارتفاع با آن.

از طرفی، بزرگ‌ترین هرم، هرمی است که قاعده آن، کف استخر (با توجه به ابعاد) و ارتفاع آن، ارتفاع استخر باشد. اگر بخواهیم سه تا هرم با این حجم (و نه با این ابعاد) در استخر جا دهیم، باید هرم ها را طوری در نظر بگیریم که دو تا از یال های جانبی هرکدام، قطر دو وجه استخر و یک یال جانبی آن‌ها، یال مشترک آن دو وجه و یال جانبی دیگر، قطر استخر باشد.



پاسخ صحیح

۴



۲

۱





۸۴- فرض کنید A_i نشان دهنده مجموعه مقسوم علیه های عدد i باشد. به عنوان مثال

$$A_6 = \{1, 2, 3, 6\} \text{ مجموعه } A_{51} \cup A_{52} \cup \dots \cup A_{100} \text{ چند عضو دارد؟}$$

② ۱۰۰ عضو

① ۵۰ عضو

④ ۳۷۷۵ عضو

③ ۲۰۰ عضو

هر عدد مقسوم علیه خودش است؛ بنابراین تمام عددهای ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ... و ۱۰۰ عضو اجتماع مجموعه ها خواهند بود. از طرفی، هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ... و ۵۰ مقسوم علیه حداقل یکی از عددهای ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ... و ۱۰۰ هستند. به عنوان نمونه:

۵۰ مقسوم علیه ۱۰۰ است، ۴۹ مقسوم علیه ۹۸ است، ۴۸ مقسوم علیه ۹۶ است، ۴۷ مقسوم علیه ۹۴ است، ... ۲۶ مقسوم علیه ۵۲ است. ۲۵ مقسوم علیه ۱۰۰، ۲۴ مقسوم علیه ۹۶، ۲۳ مقسوم علیه ۶۹ و ...

$$A_{51} \cup A_{52} \cup A_{53} \cup \dots \cup A_{100} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\} \Rightarrow n(A) = 100$$



پاسخ صحیح

۴

۳



۱





۱۵- حاصل $\sqrt{4^{(-4)^{-4}}}$ کدام است؟

② $4^{(-2)^{-4}}$

$a = 4^{(-4)^{-4}}$

① $4^{(-4)^{-2}}$

④ $2^{4^{(-4)^{-4}}}$

③ $4^{2^{(-4)^{-4}}}$

$$\sqrt{4^a} = (4^a)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^a = \left(\sqrt{4}\right)^a = 2^a$$



پاسخ صحیح





۸۶- فرض کنید $0 < b < a$ باشد. منظورمان از S_a مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a است. کدامیک از حالت های زیرمی تواند درست باشد؟

$$S_{2a} = 3S_a \quad \textcircled{2}$$

$$S_{a+b} = S_a + S_b \quad \textcircled{1}$$

$$S_{a^2} = S_a^2 \quad \textcircled{4}$$

$$S_{a+b} + S_{a-b} = 2S_a + 2S_b \quad \textcircled{3}$$

مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

بنابراین مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

$$S_{a+b} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b)^2 \Rightarrow S_{a+b} \neq S_a + S_b$$



پاسخ صحیح

۴

۳

۲

۱





۸۶- فرض کنید $0 < b < a$ باشد. منظورمان از S_a مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a است. کدامیک از حالت های زیرمی تواند درست باشد؟

$$S_{2a} = 3S_a \quad \textcircled{2}$$

$$S_{a+b} = S_a + S_b \quad \textcircled{1}$$

$$S_{a^2} = S_a^2 \quad \textcircled{4}$$

$$S_{a+b} + S_{a-b} = 2S_a + 2S_b \quad \textcircled{3}$$

مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

بنابراین مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

$$S_{2a} = \frac{3\sqrt{3}}{2} (2a)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 4a^2 = 6\sqrt{3}a^2$$

$$3S_a = 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\Rightarrow S_{2a} \neq 3S_a$$

پاسخ صحیح





۸۶- فرض کنید $0 < b < a$ باشد. منظورمان از S_a مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a است. کدامیک از حالت های زیر می تواند درست باشد؟

$$S_{2a} = 3S_a \quad (2)$$

$$S_{a+b} = S_a + S_b \quad (1)$$

$$S_{a^2} = S_a^2 \quad (4)$$

$$S_{a+b} + S_{a-b} = 2S_a + 2S_b \quad (3)$$

بنابراین مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

$$S_{a+b} + S_{a-b} = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a+b)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} (a-b)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} [(a+b)^2 + (a-b)^2] =$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} [2a^2 + 2b^2] = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 + 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = 2S_a + 2S_b$$

پاسخ صحیح

۴

۳

۲

۱





۸۶- فرض کنید $0 < b < a$ باشد. منظورمان از S_a مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a است. کدامیک از حالت های زیر می تواند درست باشد؟

$$S_{2a} = 3S_a \quad \textcircled{2}$$

$$S_{a+b} = S_a + S_b \quad \textcircled{1}$$

$$S_{a^2} = S_a^2 \quad \textcircled{4}$$

$$S_{a+b} + S_{a-b} = 2S_a + 2S_b \quad \textcircled{3}$$

بنابراین مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

$$S_{a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^4$$



$$S_{a^2} \neq S_a^2$$

$$S_a^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \right)^2 = \frac{27}{2} a^4$$



پاسخ صحیح

۴



۲

۱





۸۷- اگر رقم‌های عددی به ترتیب در عدد دیگری دیده شود، عدد دوم را «سرور» عدد اول می‌گوییم. مثلاً عدد ۲۳۱۵ سرور ۲۱ است. کدام گزینه درباره کوچک‌ترین عددی که «سرور» هر دو عدد ۳۲۵۴۵ و ۵۲۳۴۵۲ است، صحیح است؟

① بین ۳×۱۰^۷ و $۳/۳ \times ۱۰^۷$ است.

② کمتر از ۳×۱۰^۷ است.

③ بین $۳/۳ \times ۱۰^۷$ و $۵/۴ \times ۱۰^۸$ است.

④ بیش از $۵/۴ \times ۱۰^۸$ است.

برای اینکه به کوچک‌ترین سرور مشترک دو عدد برسیم، کافی است ابتدا یکی از این دو عدد (عددی که رقم سمت چپش کوچک‌تر باشد) را بنویسیم و از بین رقم‌های عدد دیگر، هر کدام که نیاز است بین رقم‌های این عدد جای دهیم. بنابراین، ابتدا عدد ۳۲۵۴۵ را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه سه رقم از رقم‌های عدد ۵۲۳۴۵۲ با همان ترتیب در بین رقم‌های عدد ۳۲۵۴۵ قرار دارند (۵، ۴، ۵)، سایر رقم‌های ۵۲۳۴۵۲ را طوری بین رقم‌های ۳۲۵۴۵ قرار می‌دهیم که عدد حاصل، کوچک‌ترین عدد ممکن باشد:

$$۳۲۵۴۵ \rightarrow ۳۲۵۲۳۴۵۲ = ۳/۲۵۲۳۴۵۲ \times ۱۰^۷$$

(به محل قرار گرفتن رقم‌های با رنگ زمینه سبز و نحوه جا دادن سایر رقم‌های ۵۲۳۴۵ که با رنگ زمینه فیروزه‌ای مشخص شده‌اند بین آن‌ها توجه کنید.) داریم:

$$۳ \times ۱۰^۷ < ۳/۲۵۲۳۴۵۲ \times ۱۰^۷ < ۳/۳ \times ۱۰^۷$$



پاسخ صحیح

۴

۳

۲





۸۸- محسن و سعید می خواهند به مدت یک ساعت، یک مسیر ۱۰۰ متری را به صورت رفت و برگشتی بدوند. اگر هر دو از ابتدای مسیر، دویدن را آغاز کنند و سرعت های آنها به ترتیب $\sqrt{40}$ و ۸ کیلومتر بر ساعت باشد، آنها در طول این مسیر تقریباً چند بار از کنار یکدیگر عبور خواهند کرد؟

محسن مسیر ۱۰۰ متری را به تعداد $\frac{\sqrt{40} \times 1000}{100}$ یعنی $10\sqrt{40}$ (تقریباً معادل ۶۴) بار می دود. سرعت سعید ۸ کیلومتر بر ساعت است، یعنی ۸۰۰۰ متر بر ساعت است. بنابراین سعید مسیر را به تعداد $\frac{8000}{100}$ یعنی ۸۰ بار طی می کند. محسن طبق جدول تناسب زیر، هر ۱۰۰ متر را در تقریباً ۰/۹۵ دقیقه طی می کند.

۱۰۰	$1000\sqrt{40}$ متر
x	۶۰ دقیقه

$$\Rightarrow x = \frac{6000}{1000\sqrt{40}} = \frac{6}{\sqrt{40}} = 0.95'$$

پاسخ صحیح

۴

۳

۲

۱





۸۸- محسن و سعید می خواهند به مدت یک ساعت، یک مسیر ۱۰۰ متری را به صورت رفت و برگشتی بدونند. اگر هر دو از ابتدای مسیر، دویدن را آغاز کنند و سرعت های آنها به ترتیب $\sqrt{40}$ و ۸ کیلومتر بر ساعت باشد، آنها در طول این مسیر تقریباً چند بار از کنار یکدیگر عبور خواهند کرد؟

سعید نیز طبق جدول تناسب زیر، هر ۱۰۰ متر را در ۰/۷۵ دقیقه طی می کند.

۱۰۰	۸۰۰۰ متر
x	۶۰ دقیقه

$$\Rightarrow x = \frac{6000}{8000} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75'$$

بنابراین هر بار که سعید به آخر مسیر می رسد، هنوز محسن باید ۰/۲۰ دقیقه دیگر بدود تا به انتهای مسیر برسد که در این مدت نیز سعید دوباره محسن را می بیند. بنابراین به تعداد دفعات رفت و برگشت سعید یعنی ۸۰ بار این دو نفر یکدیگر را می بینند.



پاسخ صحیح

۴

۳



۱





۸۹- سه خط به معادله های $y = ax + b$ ، $y = cx + d$ و $y = ex + f$ تشکیل یک مثلث به مساحت ۱ واحد می دهند. مساحت مثلثی که از سه خط به معادله $y = ax + 2b$ ، $y = cx + 2d$ و $y = ex + 2f$ به دست می آید کدام است؟

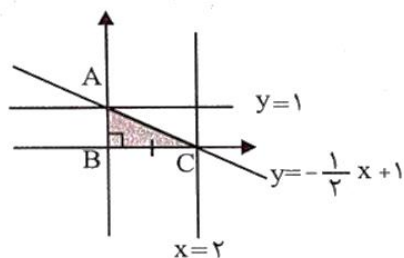
② ۲ واحد

① ۱ واحد

④ ۶ واحد

③ ۴ واحد

کافی است سه خطی را در نظر بگیریم که با هم مثلثی به مساحت یک تشکیل دهند.



فرض می کنیم خط اول یعنی $y = ax + b$ به صورت $y = 1$ باشد. همچنین خط دوم یعنی $y = cx + d$ به صورت $x = 2$ باشد. همچنین خط سوم یعنی $y = ex + f$ به صورت $y = -\frac{1}{2}x + 1$ باشد. بنابراین مطابق شکل، از برخورد آنها مثلث ABC به مساحت ۱ واحد ایجاد می شود.

پاسخ صحیح

۴

۳

۲

۱





۸۹- سه خط به معادله های $y = ax + b$ ، $y = cx + d$ و $y = ex + f$ تشکیل

یک مثلث به مساحت ۱ واحد می دهند. مساحت مثلثی که از سه خط به معادله

$y = ax + 2b$ ، $y = cx + 2d$ و $y = ex + 2f$ به دست می آید کدام است؟

* همان طور که ملاحظه می کنید، با دو برابر شدن عرض از مبدأ خط های اولیه،

هم قاعده مثلث دو برابر شد و هم ارتفاع آن؛



بنابراین مساحت مثلث $2 \times 2 = 4$ برابر خواهد شد.

① ۱ واحد

③ ۴ واحد

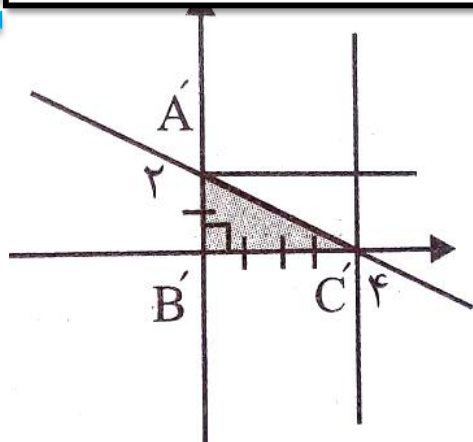
حال در حالت جدید، خط اول به صورت $y = 2$ ، خط دوم به صورت

$x = 4$ و خط سوم به صورت $y = -\frac{1}{4}x + 2$ در می آیند. این سه خط را

رسم می کنیم.

مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر $\frac{4 \times 2}{2} = 4$ می شود. پس طبق این مثال

مساحت مثلث جدید ۴ واحد می شود.



۴



۲

۱





۹۰- فرض کنید k یک عدد ثابت است و $A = \{x^2 + k \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < k\}$

اگر بدانیم $\{6, 9\} \subseteq A$ ، آنگاه k عضو کدام مجموعه است؟

$$\{4x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\} \quad \textcircled{2}$$

$$\{5x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} \quad \textcircled{1}$$

$$\{3x - 4 \mid x \in \mathbb{Z}\} \quad \textcircled{4}$$

$$\{2x + 6 \mid x \in \mathbb{Z}\} \quad \textcircled{3}$$

با حدس و آزمایش $k = 5$ می شود. بنابراین $-3 \leq x < 5$ است. پس اعضای A عبارت اند از:

$$A = \{x^2 + 5 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 5\}$$

$$= \{(-3)^2 + 5, (-2)^2 + 5, (-1)^2 + 5, 0^2 + 5, \dots, (4)^2 + 5\}$$

$$= \{14, 9, 6, 5, \dots, 21\}$$



پاسخ صحیح

۴

۳

۲

۱





۹۰- فرض کنید k یک عدد ثابت است و $A = \{x^2 + k \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < k\}$

اگر بدانیم $\{6, 9\} \subseteq A$ ، آنگاه k عضو کدام مجموعه است؟

$$\{4x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\} \text{ ۲}$$

$$\{5x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} \text{ ۱}$$

$$\{3x - 4 \mid x \in \mathbb{Z}\} \text{ ۴}$$

$$\{2x + 6 \mid x \in \mathbb{Z}\} \text{ ۳}$$

همان طور که مشاهده می شود، ۹ و ۶ اعضای A هستند. بنابراین $\{6, 9\} \subseteq A$ است. حال باید ببینیم در کدام گزینه عدد ۵ ساخته می شود. با بررسی گزینه ها در گزینه (۴) اگر به جای x مقدار ۳ قرار دهیم، عدد ۵ ساخته می شود.



پاسخ صحیح

